UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

Ústav matematických vied

ŠTRUKTÚRA 1-PLANÁRNYCH GRAFOV

Študentská vedecká a odborná činnosť

Bc. Dávid Hudák

Košice 2009

Abstrakt

Graf sa nazýva 1-planárny ak sa dá nakresliť do roviny tak, že každá jeho hrana môže byť preťatá najviac jednou inou hranou. V tejto práci sa zaoberáme štrukturálnymi vlastnosťami 1-planárnych grafov v porovnaní s planárnymi grafmi. Popísali sme maximálne 1-planárne grafy vzhľadom k počtu hrán, načrtli sme vlastnosti hamiltonovských 1-planárnych grafov a venovali sme sa aj chromatickému indexu. Z lokálnych vlastností sme preskúmali niekoľko špeciálnych tried a uviedli sme príklady ľahkých grafov v týchto triedach.

Kľúčové slová: 1-planárny graf, maximálny 1-planárny graf, ľahké grafy

Abstract

A graph is called 1-planar if it can be drawn into the plane so that each its edge is crossed by at most one another edge. In this thesis we study the structural characteristics of 1-planar graphs compared with planar graphs. We have described the maximal 1-planar graphs taken into consideration with the number of edges. We have sketched the properties of hamiltonian 1-planar graphs and we were dedicating to the chromatic index as well. From local characteristics we have checked some special graph families and we have presented examples of light graphs in these graph families.

Key words: 1-planar graph, maximal 1-planar graph, light graphs

Obsah

1 Úvod

V tejto práci študujeme štrukturálne vlastnosti 1-planárnych grafov, teda grafov, ktorých každá hrana môže byť preťatá najviac jednou inou hranou pri nakreslení do roviny. O vlastnostiach 1-planárnych grafov je dodnes známe pomerne málo. Práve nedostatok základných výsledkov (v porovnaní s planárnymi grafmi) a ich neúplnosť je motiváciou a núti k preskúmaniu tejto triedy grafov. Tieto grafy pritom vykazujú mnohé podobnosti s planárnymi grafmi (lineárny počet hrán, vrcholy malých stupňov,...), no predsa sa nájdu aj rozdiely (napr. nemožnosť charakterizácie pomocou vety Kuratowského typu založenej na konečnom počte zakázaných podgrafov, neuzavretosť triedy vzhľadom na kontrakcie hrán).

Cieľom tejto práce je skúmať lokálne vlastnosti triedy 1-planárnych grafov a jej podtried s ohraničeniami vzhľadom na minimálny stupeň a obvod. Ďalej sa v práci študujú niektoré globálne vlastnosti (napr. maximalita 1-planárnych grafov).

2 Základné definície

2.1 Grafy

Označenie: pre (konečnú) množinu A je $\mathcal{P}_2(A) = \{\{u,v\} : u,v \in A, u \neq v\}$.

Definícia 1. *Grafom* G rozumieme usporiadanú dvojicu množín $G = (V,E)$, kde V je množina vrcholov a $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ je množina hrán.

Nech $G = (V,E)$. Hrana $e \in E, e = \{u,v\}$ (pre jednoduchosť budeme tiež označovať $e = uv$) má *koncové vrcholy* u, v. Hovoríme, že hrana e je *incidentná* s vrcholom u resp. v. Dve hrany sú *susedné*, ak majú spoločný koncový vrchol. Dva vrcholy sú *susedné*, ak sú koncovými vrcholmi nejakej hrany. Počet hrán incidentných s vrcholom $v \in V$ sa nazýva *stupeň vrchola* v a označuje sa $\deg_G(v)$ alebo $\deg(v)$ (ak je z kontextu zrejmé, o ktorý graf ide). Minimálny stupeň grafu G označujeme $\delta(G)$ a maximálny stupeň označujeme $\Delta(G)$.

Kompletným grafom K_n na n vrcholoch rozumieme graf $K_n = (V,E)$, kde $|V| = n$ a $E = \mathcal{P}_2(V)$. *Bipartitný* graf $G = (V,E)$ je graf, v ktorom $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ a ak $xy \in E$, tak $x \in V_1$ a $y \in V_2$ alebo $x \in V_2$ a $y \in V_1$. Takýto graf budeme označovať $G = (V_1, V_2; E)$. Ak v $G = (V_1, V_2; E)$ je každý vrchol $x \in V_1$ spojený hranou s každým vrcholom $y \in V_2$, tak G nazývame *kompletný bipartitný* graf a pre $|V_1| = r, |V_2| = s$ ho označujeme $K_{r,s}$. *k-regulárny* graf je graf, ktorého všetky vrcholy majú stupeň k. *Multigraf* je graf, v ktorom dva vrcholy môžu tvoriť viac hrán (v prípade multigrafu je E multimnožina tvorená prvkami $\mathcal{P}_2(V)$). Tieto hrany potom nazývame *násobné* hrany. *Slučkou* nazývame hrany vv pre $v \in V$.

Nakreslenie (diagram) grafu $G = (V,E)$ je zobrazenie G do roviny také, že každému vrcholu $v \in V$ priradzuje nejaký bod roviny B_v a každej hrane $e \in E$ spájajúcej vrcholy $u, v \in V$ priradzuje oblúk (jednoduchú krivku) $o(e)$ spájajúci body B_u, B_v. Pritom musí byť splnené:

- body priradené rôznym vrcholom sú rôzne,
- oblúky okrem svojich koncových bodov neobsahujú žiadne body roviny, ktoré by zodpovedali nejakým vrcholom grafu.

V práci budeme ďalej predpokladať, že nakreslenie grafu je *dobré* (pozri [9]), t.j. žiadny bod roviny nie je priesečníkom troch alebo viacerých oblúkov, žiadne dva oblúky priradené dvom susedným hranám sa navzájom nepretínaju a žiadne dva oblúky priradené dvom hranám sa nepretínajú viac ako raz.

Sledom rozumieme konečnú postupnosť $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ začínajúcu aj končiacu vrcholom, v ktorej sa striedajú vrcholy a hrany, pričom $e_i = v_{i-1}v_i$ pre $i = 1, \ldots, k$; uzavretým sledom rozumieme sled začínajúci a končiaci v tom istom vrchole. Číslo k udáva *dĺžku* sledu. *Ťah* je sled, v ktorom sa žiadna hrana nevyskytuje viackrát. Otvorený ťah, v ktorom sa žiaden vrchol neopakuje, sa nazýva *cesta*. Uzavretý ťah, v ktorom sa vyskytuje práve jeden vrchol dvakrát a ostatné vrcholy práve raz, sa nazýva *kružnica*.

Hovoríme, že dva vrcholy $v_i, v_j \in V$ *súvisia* v G, ak existuje medzi nimi sled začínajúci vo vrchole v_i a končiaci vo vrchole v_j.

Definícia 2. Graf $G = (V, E)$ sa nazýva *súvislý*, ak každý vrchol $v_i \in V$ súvisí s každým vrcholom $v_j \in V$.

V tejto práci budeme uvažovať súvislé grafy bez násobných hrán a slučiek. Vrchol stupňa k budeme nazývať k-*vrchol*, vrchol stupňa $\geq k$ budeme nazývať $\geq k$-*vrchol*. Pod k-*cestou* (k-*kružnicou*) budeme rozumieť cestu P_k (kružnicu C_k) na k vrcholoch. k-*hviezda* S_k je kompletný bipartitný graf $K_{1,k}$.

Hovoríme, že $G' = (V', E')$ je *podgraf* grafu $G = (V, E)$, ak $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$, pričom $e = uv \in E'$ iba ak $u, v \in V'$ (naopak G nazývame *nadgraf* grafu G'). Podgraf nazývame *faktorový*, ak $V' = V$ a $E' \subseteq E$. Dva nesusedné vrcholy u, v grafu G môžeme spojiť hranou uv, tým vznikne graf $G + uv = (V, E \cup \{u, v\})$. Túto operáciu budeme nazývať *pridanie hrany*. Podobne definujeme *odobratie hrany* e, jej výsledkom je graf $G - e = (V, E \setminus e)$. *Most* je taká hrana, ktorú keď odoberieme zo súvislého grafu, tak sa stane nesúvislým. Rovnako sa dá z grafu odobrať aj množina hrán. Nech teda $P \subseteq E(G)$, graf $G - P$ je potom faktorový podgraf G, kde množina hrán je $E \setminus P$.

Vrcholovým rezom rozumieme takú množinu vrcholov $S \subseteq V(G)$, že $G \setminus S = (V \setminus S, E \setminus \{xy : x \in S \text{ alebo } y \in S\})$ je nesúvislý graf. Ak $|S| = k$, hovoríme o vrcholovom k-reze. Najmenšie k také, že v G existuje vrcholový k-rez sa nazýva číslo vrcholovej súvislosti; vtedy hovoríme, že graf je k-*súvislý*.

2.2 Planárne grafy

Definícia 3. Graf sa nazýva *planárny*, ak existuje také jeho nakreslenie v rovine, že sa žiadne dve jeho hrany nepretínajú; toto nakreslenie nazývame *rovinný* graf.

Nakreslenie planárneho grafu G do roviny rozdelí rovinu na maximálne otvorené súvislé oblasti v $\mathbb{R}^2 \setminus G$, ktoré nazveme *stenami* grafu. Potom existuje aj (topologická) hranica $\partial\alpha$ každej steny α. Stenu, ktorá je neohraničená nazveme *vonkajšou* stenou, všetky ostatné *vnútornými* stenami.

Hovoríme, že hrana e je *incidentná* so stenou α ak $e \in \alpha$. Hovoríme, že vrchol v je *incidentný* so stenou α ak $v \in \alpha$. Relácie $e \in \alpha$ a $v \in \alpha$ sa tu uvažujú v topologickom zmysle, teda $e \in \alpha \Leftrightarrow o(e) \subseteq \partial\alpha$ a $v \in \alpha \Leftrightarrow B_v \in \partial\alpha$ (vrchol alebo hrana leží na stene ak patrí hranici steny). Dve steny sú *susedné*, ak majú spoločnú hranu. *Hranicou steny* $\alpha \in G$ rovinného grafu G je najkratší uzavretý sled $s(\alpha)$ tvorený všetkými hranami a vrcholmi incidentnými so stenou α. *Veľkosť steny* $\alpha \in G$ je potom dĺžka hranice $s(\alpha)$. Stenu veľkosti k budeme nazývať *k-stena* alebo *k-uholník*, stenu veľkosti $\geq k$ budeme nazývať *$\geq k$-stena*. Nech je daný graf G obsahujúci 4-stenu $[abcd]$. Do grafu G pridáme hrany ac, bd tak, že sa pretínajú vo vnútri steny. Tým vznikne nový graf G' (G je faktorový podgraf grafu G'). Hrany ac a bd grafu G' budeme nazývať *diagonály*. Množinu stien rovinného grafu označíme F, a teda rovinný graf G bude usporiadaná trojica množín $G = (V, E, F)$.

V ďalšom zavedieme pojem izomorfizmu rovinných grafov. Nech sú dané dva rovinné grafy $G = (V, E, F)$ a $G' = (V', E', F')$. Budeme hovoriť, že rovinné grafy G a G' sú *izomorfné*, ak existuje bijekcia σ medzi V a V', E a E', F a F' zachovávajúca vzťahy susednosti a incidencie medzi prvkami V, E a F. To znamená, že nevyžadujeme len vzťah incidencie medzi vrcholmi a hranami (pre $x, y \in V$: $xy \in E \Leftrightarrow \sigma(x)\sigma(y) \in E'$), ale navyše aj incidenciu vrcholov a hrán so stenami (pre $x \in V \cup E$ a $f \in F$: $x \in f \Leftrightarrow \sigma(x) \in \sigma(f)$). Vzťah izomorfizmu budeme zapisovať $G \cong G'$.

Veta 2.1 (Eulerov polyedrálny vzorec)**.**
Nech G je súvislý rovinný graf s n vrcholmi, m hranami a f stenami. Potom

$$n - m + f = 2.$$

Dôkaz. Dokazovať budeme matematickou indukciou podľa počtu f stien rovinného grafu.

1. $f = 1$: Potom G je strom, lebo neobsahuje kružnicu. Ak by totiž G obsahoval kružnicu, tak podľa Jordanovej vety rozdeľuje rovinu na dve

oblasti a teda na dve steny. Pre stromy platí $m = n - 1$. Z toho potom $n - m + f = 1 + 1 = 2$.

2. Majme rovinný graf G, ktorý má $f > 1$ stien. Nech tvrdenie platí pre každý rovinný graf s menej ako f stenami. Z predpokladu $f > 1$ vyplýva, že G nie je strom, teda obsahuje kružnicu. Odoberme z kružnice ľubovoľnú hranu. Získaný graf G' má $m' = m - 1$ hrán, $n' = n$ vrcholov a $f' = f - 1$ stien (odobratím kružnicovej hrany sa dve s ňou incidentné steny spoja do jednej). Preňho už platí indukčný predpoklad, teda

$$\begin{aligned} n' - m' + f' &= 2 \\ n - (m - 1) + (f - 1) &= 2 \\ n - m + f + 1 - 1 &= 2 \\ n - m + f &= 2 \end{aligned}$$ □

Planárny graf G sa nazýva *maximálny planárny*, ak je planárny, ale $G + uv$ nie je planárny pre žiadne dva nesusedné vrcholy u, v.

Lema 2.2. *Ak G je maximálny planárny graf s $n \geq 3$ vrcholmi, tak v každom jeho rovinnom diagrame je každá stena trojuholník. Nakreslenie G nazývame triangulácia.*

Dôkaz. Sporom - nech G je maximálny planárny graf s $n \geq 3$ vrcholmi a nech existuje jeho rovinný diagram, ktorý obsahuje stenu α veľkosti ≥ 4 (bez ujmy na všeobecnosti (BUNV) nech α je vnútorná stena). Potom v G existuje 4-vrcholová cesta $xyzw$, ktorá je časťou hranice $s(\alpha)$ steny α (inak nutne $x = w$; keďže však veľkosť α je aspoň 4 a G nemá slučky, tak existuje vrchol $u \neq y, z$ incidentný s α taký, že w susedí s u. Potom $yzwu$ je hľadaná cesta).

Ak by ďalej v G existovali obidve hrany xz, yw, tak obidve ležia vo vonkajšku steny α, teda sa nutne pretínajú, čo je spor s planárnosťou G.

Teda BUNV nech $xz \notin E(G)$. Potom graf $G + xz$ je planárny (hranu xz možno vložiť dovnútra α tak, aby nepretínala žiadnu inú - to vyplýva z faktu, že x a z možno spojiť jednoduchou krivkou ležiacou v α, ktorá nepretína hranicu α), čo je však spor s maximalitou G (pridanie hrany xz malo spôsobiť stratu planarity G). □

Dôsledok 2.3. *Nech $n \geq 3$. Nech G je maximálny planárny graf s n vrcholmi a m hranami. Potom $m = 3n - 6$.*

Dôkaz. Nech h je počet dvojíc (t, e), kde $t \in F$ je 3-stena v G a e je incidentná hrana s t. Nech f je počet stien grafu.

Platí, že $h = 3f$ a tiež $h = 2m$. Z toho $2m = 3f \Rightarrow f = \frac{2}{3}m$
Po dosadení do Eulerovho vzorca dostávame

$$\begin{aligned} n - m + \frac{2}{3}m &= 2 \qquad / \cdot 3 \\ 3n - 3m + 2m &= 6 \\ 3n - m &= 6 \\ m &= 3n - 6 \end{aligned}$$

□

Dôsledok 2.4. *Každý planárny graf obsahuje vrchol stupňa najviac 5.*

Dôkaz. Sporom - nech existuje planárny graf minimálneho stupňa ≥ 6. Platí

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 6n$$

Z toho $m \geq 3n$; podľa dôsledku 2.3 je $m \leq 3n - 6 \leq m - 6$, čo je spor. Poznamenajme, že hranica 5 je najlepšia možná, pretože sa nadobúda napríklad v grafe pravidelného dvadsaťstena. □

Dôsledok 2.5. *Pre každý súvislý rovinný graf G platia nasledujúce rovnosti:*

(1) $$\sum_{v \in V(G)} (2\deg_G(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (\deg_G(f) - 6) = -12$$

(2) $$\sum_{f \in F(G)} (2\deg_G(f) - 6) + \sum_{v \in V(G)} (\deg_G(v) - 6) = -12$$

(3) $$\sum_{v \in V(G)} (\deg_G(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (\deg_G(f) - 4) = -8$$

Dôkaz. Zrejme platí, že:

$$2m = \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v)$$

$$2m = \sum_{f \in F(G)} \deg_G(f)$$

(druhá rovnosť vyplýva z faktu, že hrana rovinného grafu, ktorá nie je most, inciduje s práve dvomi stenami, a mosty sa do veľkosti stien, s ktorými incidujú, započítavajú dvakrát). Po prenásobení oboch strán Eulerovho vzorca $n - m + f = 2$ číslom 6 resp. 4 dostaneme:

(1)

$$
\begin{aligned}
6f - 6m + 6n &= 12 \\
(6f - 2m) + (6n - 4m) &= 12 \\
\left(6f - \sum_{f \in F(G)} \deg_G(f)\right) + 2\left(3n - \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v)\right) &= 12 \\
\sum_{f \in F(G)} (6 - \deg_G(f)) + 2 \sum_{v \in V(G)} (3 - \deg_G(v)) &= 12 \\
\sum_{v \in V(G)} (2\deg_G(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (\deg_G(f) - 6) &= -12
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
6f - 6m + 6n &= 12 \\
(6f - 4m) + (6n - 2m) &= 12 \\
2\left(3f - \sum_{f \in F(G)} \deg_G(f)\right) + \left(6n - \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v)\right) &= 12 \\
\sum_{f \in F(G)} (6 - 2\deg_G(f)) + \sum_{v \in V(G)} (6 - \deg_G(v)) &= 12 \\
\sum_{f \in F(G)} (2\deg_G(f) - 6) + \sum_{v \in V(G)} (\deg_G(v) - 6) &= -12
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
4f - 4m + 4n &= 8 \\
(4f - 2m) + (4n - 2m) &= 8 \\
\left(4f - \sum_{f \in F(G)} \deg_G(f)\right) + \left(4n - \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v)\right) &= 8 \\
\sum_{f \in F(G)} (4 - \deg_G(f)) + \sum_{v \in V(G)} (4 - \deg_G(v)) &= 8 \\
\sum_{v \in V(G)} (\deg_G(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (\deg_G(f) - 4) &= -8
\end{aligned}
$$

$\square$

3 1-planárne grafy

3.1 Základné vlastnosti

Definícia 4. Graf sa nazýva 1-*planárny*, ak existuje jeho nakreslenie v rovine také, že každá jeho hrana je preťatá najviac jednou inou hranou.

Nech G je 1-planárny graf a nech $D(G)$ je jeho 1-planárny diagram. To znamená, že $D(G)$ je reprezentácia grafu G v rovine taká, že každá jeho hrana je preťatá najviac jednou inou hranou. Ak dva oblúky $\widehat{xy}$, $\widehat{uv}$ (zodpovedajúce hranám xy, uv) sa pretínajú v $D(G)$ a z je ich prienik, hovoríme, že z je *priesečník* (angl. *crossing*) hrán xy, uv. Nech $C = C(D(G))$ je množina všetkých priesečníkov v $D(G)$ a nech E_0 je množina všetkých nepreťatých hrán v $D(G)$. *Asociovaným rovinným grafom* grafu $D(G)$ nazývame rovinný graf $D(G)^\times$ taký, že

- $V(D(G)^\times) = V(D(G)) \cup C$
- $E(D(G)^\times) = E_0 \cup \{xz, yz |\ xy \in E(D(G)) - E_0, z \in C, z \in xy\}$.

V $D(G)^\times$ sa stanú priesečníky $D(G)$ novými 4-vrcholmi; nazývame ich *priesečníkové vrcholy* alebo *nepravé vrcholy* (steny incidentné s nepravými vrcholmi budeme nazývať *nepravé steny*). Naopak vrcholy $D(G)^\times$, ktoré boli vrcholmi aj v pôvodnom grafe $D(G)$, budeme nazývať *pravé vrcholy*.

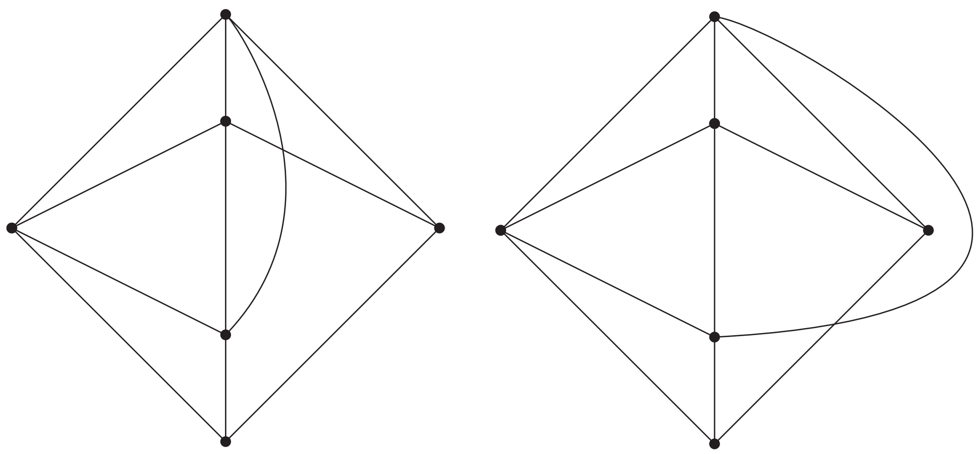
1-planárny graf môže mať viacero neizomorfných rovinných asociovaných diagramov. Zo všetkých možných 1-planárnych diagramov 1-planárneho grafu G označíme $M(G)$ diagram s najmenším počtom priesečníkov (nemusí byť jednoznačne určený) a $M(G)^\times$ jeho asociovaný rovinný graf; budeme ho nazývať *minimálny asociovaný graf*. Z článku [2] je známy fakt, že ak G je 3-súvislý 1-planárny graf, tak $M(G)^\times$ je tiež 3-súvislý.

Lema 3.1. *Najmenší neplanárny* 1*-planárny graf s dvoma rôznymi neizomorfnými minimálnymi asociovanými grafmi je graf na obrázku 1 na* 6 *vrcholoch.*

Dôkaz.

1. Každý $\leq$ 4-vrcholový graf je planárny.

2. Jediný 1-planárny neplanárny graf na 5 vrcholoch je K_5. Tento graf má $\binom{5}{2} = 10$ hrán a priesečníkové číslo 1. Neexistuje 1-planárny diagram K_5, ktorý by mal aspoň dva priesečníky. Ak vezmeme jeho podgraf K_4, tak ten je planárny. Existuje nakreslenie s jedným priesečníkom a takisto aj bez preťatia



Obrázok 1: Neplanárny 1-planárny graf majúci dva neizomorfné minimálne asociované grafy

hrán. Vezmime graf K_4 bez preťatia hrán. Každá stena je potom trojuholník. Ak vložíme piaty vrchol do ľubovoľnej z nich, tak sa pretne práve jedna hrana pri nakreslení K_5. Ak však vezmeme graf K_4 s jedným priesečníkom z. Piaty vrchol nemôže ležať v žiadnom „nepravom“ trojuholníku, porušilo by to 1-planaritu. Preto piaty vrchol leží v 4-stene. Druhý priesečník by museli tvoriť niektoré dve zo štyroch ďalších hrán, čo ale vytvára zakázanú situáciu (predpokladáme, že nakreslenie je dobré). Ak vytvoríme teraz minimálny asociovaný graf grafu K_5, tak nám pribudne ďalší vrchol a 2 nové hrany. Takto sme dostali planárny graf so 6 vrcholmi a 12 hranami. Je to maximálny planárny graf ($3 \cdot 6 - 6 = 12$) a všetky jeho steny sú 3-steny. Nakoľko je 3-súvislý, má jediné vnorenie do roviny (podľa Whitneyovej vety).

3. Najmenší graf s dvoma neizomorfnými minimálnymi asociovanými grafmi je graf z obrázka 1. Argumentom je, že 4-steny v znázornenom minimálnom asociovanom grafe v prvom prípade majú spoločnú hranu a v druhom iba spoločný vrchol. □

Lema 3.2. [2] *Nech G je 1-planárny graf s n vrcholmi a m hranami. Potom*

$$m \leq 4n - 8.$$

Dôkaz. Uvažujme maximálny (s prihliadnutím na počet hrán) 1-planárny graf G s n vrcholmi. Nech $D(G)$ je 1-planárny diagram grafu G. Nech c je počet priesečníkov v $D(G)$. Ak dve hrany xy, $zw \in E(G)$ sa pretínajú v $D(G)$, tak v maximálnom grafe G potom platí $xz, xw, yz, yw \in E(G)$ (inak by bolo možné príslušnú chýbajúcu

hranu vložiť do $D(G)$ tak, aby nepretínala žiadne iné hrany). Ak teda odoberieme jednu hranu z každej dvojice hrán, ktoré sa pretínali v $D(G)$, tak výsledný graf G' bude rovinná triangulácia s $n' = n$ vrcholmi, m' hranami a f' stenami. Podľa dôsledku Eulerovej vzorca $m' \leq 3n' - 6$, $f' \leq 2n' - 4$.
Teda $m = m' + c \leq m' + \frac{f'}{2} \leq 3n - 6 + n - 2 = 4n - 8$. $\square$

Dôsledok 3.3. [2] *Každý* 1-*planárny graf obsahuje vrchol stupňa najviac* 7*; hranica* 7 *je najlepšia možná.*

Dôkaz. Nech G je 1-planárny graf. Podľa predchádzajúcej lemy 3.2

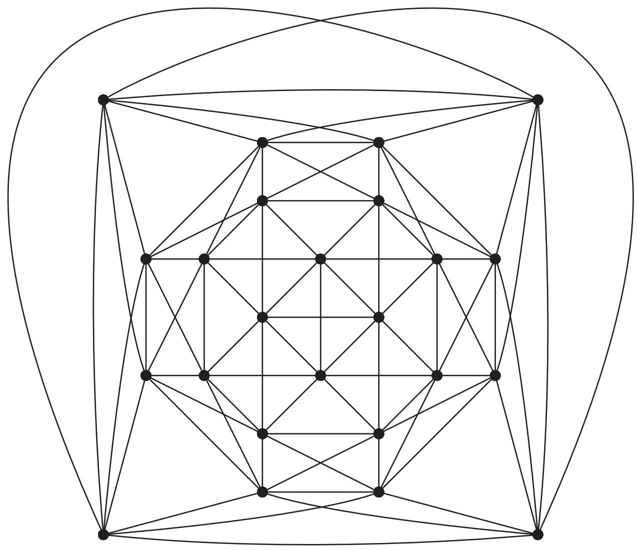
$$\sum_{x \in V(G)} \deg_G(x) = 2m \leq 8n - 16$$

z toho

$$\sum_{x \in V(G)} (\deg_G(x) - 8) \leq -16$$

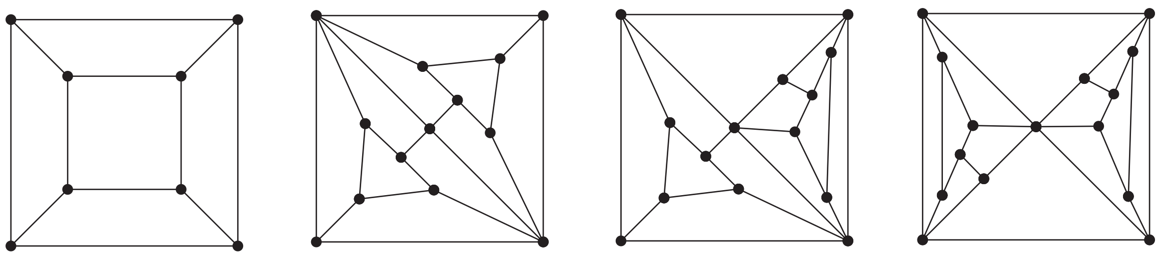
Tvrdenie potom vyplýva zo zápornej hodnoty ľavej strany nerovnosti.

Graf na obrázku 2 je 7-regulárny 1-planárny graf, teda v tvrdení hranicu 7 znížiť nemožno. $\square$



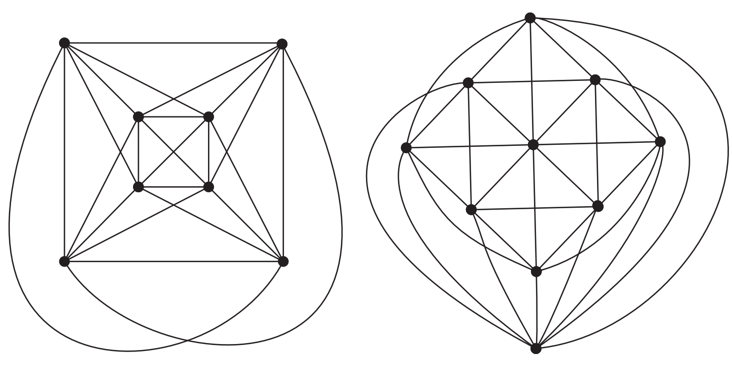
Obrázok 2: 7-regulárny 1-planárny graf podľa [2]

Prirodzenou otázkou je, pre ktoré hodnoty n sa teoretická hranica maximálneho počtu hrán 1-planárnych n-vrcholových grafov ($m = 4n - 8$) nadobúda. 1-planárny neplanárny graf s najmenším počtom vrcholov je K_5. Ale hranica $4 \cdot 5 - 8 = 12$ sa nemôže nadobudnúť, pretože K_5 má iba 10 hrán. Podobne pre K_6: $4 \cdot 6 - 8 = 16 > \binom{6}{2} = 15$. Ako uvádzajú J. Pach a G. Tóth v [13], 1-planárne grafy s n vrcholmi nadobúdajú maximálny počet hrán $4n - 8$ pre každé $n \geq 12$. Nasledovný dôkaz je prevzatý z ich článku [13]. Najprv ukážeme, že pre každé $n \geq 12$ existuje n-vrcholový planárny graf, ktorého všetky steny sú 4-steny a žiadne dve steny nemajú spoločnú viac ako jednu hranu (inými slovami, je 3-súvislý).



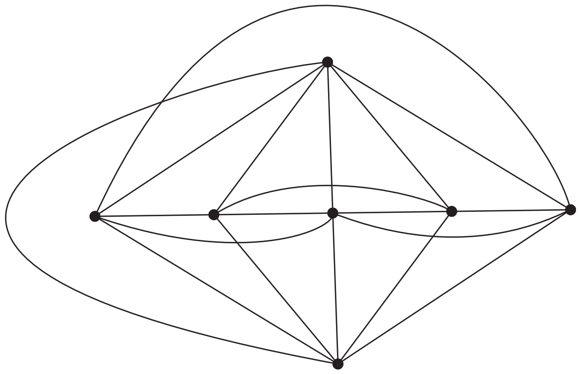
Obrázok 3: Základné grafy pre konštrukciu z [13]

Na obrázku 3 sú ilustrované príklady takýchto grafov pre $n = 8, 13, 14, 15$. Ak máme príklad grafu G s n vrcholmi, tak vieme zostrojiť aj graf s $n + 4$ vrcholmi nasledovnou konštrukciou: vrcholy niektorej zo 4-stien grafu G stotožníme s vonkajšími vrcholmi 8-vrcholového grafu (kocky) z obrázka 3. Takto získame rovinné grafy so samými 4-stenami na $n \geq 12$ vrcholoch. Ak teraz do každej steny vložíme obe diagonály, tak získame 1-planárny graf s $4n - 8$ hranami. Príklady 1-planárnych grafov s 8 resp. 10 vrcholmi a s 24 resp. 32 hranami sú znázornené na obrázku 4.



Obrázok 4: 1-planárne grafy s $n = 8, 10$ vrcholmi a $4n - 8$ hranami

Otázkou zostáva, či existujú 1-planárne grafy na $n = 7, 9, 11$ vrcholoch s dosiahnutou teoretickou hranicou počtu hrán. Pre $n = 7$ je teoretická horná hranica $4 \cdot 7 - 8 = 20$. Graf $K_7 - E(K_3)$ nie je 1-planárny (pozri [10]) a má 18 hrán. Ak by existoval 7-vrcholový 1-planárny graf s 20 hranami, tak nutne je to graf K_7^- (K_7^- je graf K_7 bez jednej hrany, K_7 má 21 hrán). Avšak K_7^- obsahuje $K_7 - E(K_3)$ ako podgraf, teda K_7^- nie je 1-planárny. 7-vrcholový 1-planárny graf s 19 hranami existuje (obrázok 5), teda hranica pre $n = 7$ je 19.



Obrázok 5: 1-planárny graf so 7 vrcholmi a 19 hranami

Veta 3.4. *Neexistuje* 1*-planárny graf s* 9 *vrcholmi a* $4 \cdot 9 - 8 = 28$ *hranami.*

Dôkaz. Sporom - nech existuje 1-planárny graf G s 9 vrcholmi a $4 \cdot 9 - 8 = 28$ hranami. G potom obsahuje ako faktorový podgraf rovinnú trianguláciu T s $3 \cdot 9 - 6 = 21$ hranami; z toho máme, že $D(G)$ má 7 priesečníkov ($|E(G) - E(T)| = 7$ a týchto 7 hrán pretína nejakých 7 hrán T). Z maximality G ďalej vyplýva, že ak xy, uv je dvojica pretínajúcich sa hrán, tak G obsahuje aj hrany xu, uy, yv, vx. Odoberme teraz z G všetkých 7 dvojíc pretínajúcich sa hrán. Vzniknutý graf G' je rovinný, má 9 vrcholov, $28 - 2 \cdot 7 = 14$ hrán, 7 4-stien (vnútri ktorých boli dvojice pretínajúcich sa hrán) a f iných stien. Podľa Eulerovho vzorca však platí $9 - 14 + 7 + f = 2$, z čoho $f = 0$. Teda G' má iba sedem 4-stien a žiadne iné. Použijúc tretí vzťah z dôsledku 2.5.

$$\sum_{v \in V(G')} (\deg_{G'}(v) - 4) + \sum_{f \in F(G')} (\deg_{G'}(f) - 4) = -8$$

vzhľadom na horeuvedené fakty z neho vyplýva rovnosť

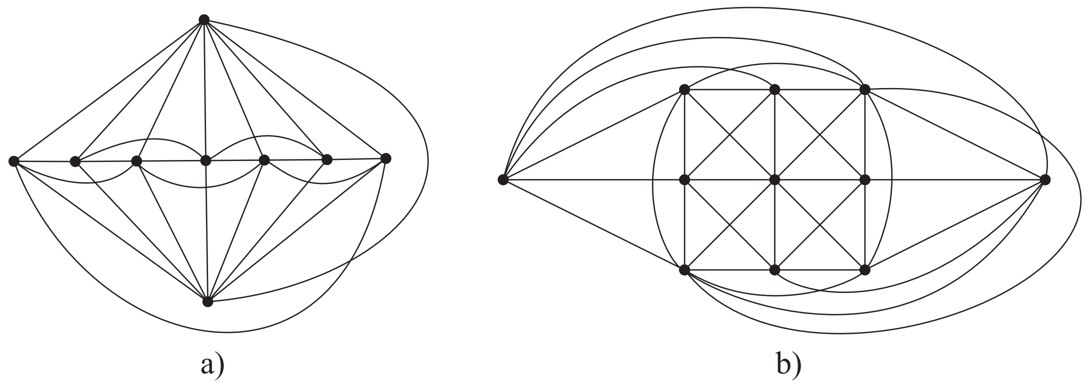
$$\sum_{v \in V(G')} (\deg_{G'}(v) - 4) = -8.$$

Ak by G' obsahoval vrchol stupňa 1, tak by mal aspoň jednu $\geq$5-stenu, čo je v spore s tým, že má len samé 4-steny. Graf G teda neobsahuje vrcholy stupňa 1.

Predpokladajme, že G' neobsahuje 2-vrcholy; z horeuvedenej rovnosti potom vyplýva, že G' má nutne osem 3-vrcholov a jediný 4-vrchol. Teda G' obsahuje štvoricu 4-stien $[xyuv], [xvab], [xbcd], [xdey]$. Vrcholy u, a, c, e musia byť stupňa 3, avšak c nemôže susediť ani s e, ani s a (vznikli by tak 3-steny). Teda c susedí s u a následne e susedí s a, čo je spor s rovinnosťou G'.

Graf G' teda musí obsahovať 2-vrchol. Tento vrchol inciduje s dvoma 4-stenami. Keď potom do nich späť vložíme dvojice pretínajúcich sa hrán, tak nutne dve z nich vytvoria násobnú hranu, čo je spor. □

9-vrcholový 1-planárny graf s 27 hranami existuje (obrázok 6a)), teda hranica pre $n = 9$ je 27. 11-vrcholový 1-planárny graf s $4 \cdot 11 - 8 = 36$ hranami existuje (obrázok 6b)).



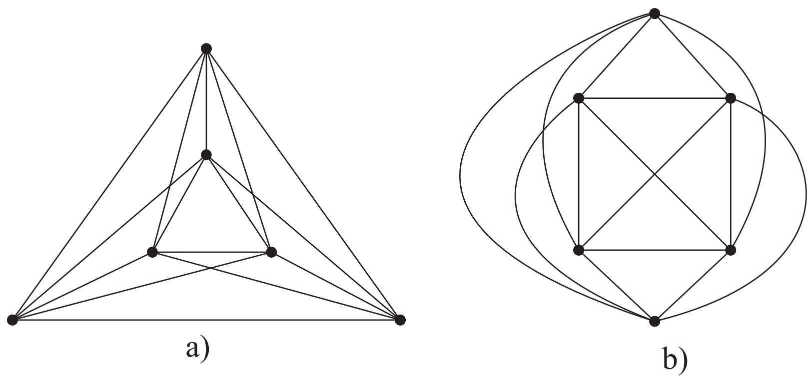
Obrázok 6: 1-planárne grafy s $n = 9$ resp. $n = 11$ vrcholmi a 27 resp. 36 hranami

Pre zhrnutie zopakujme, že 1-planárne grafy s n vrcholmi nadobúdajú hornú hranicu počtu hrán $4n - 8$ pre všetky $n \geq 10$ a $n = 8$. 1-planárne grafy so 7 (resp. 9) vrcholmi a s 20 (resp. 28) hranami neexistujú. Pre tieto grafy sú hranice 19 (resp. 27).

3.2 Maximálne 1-planárne grafy

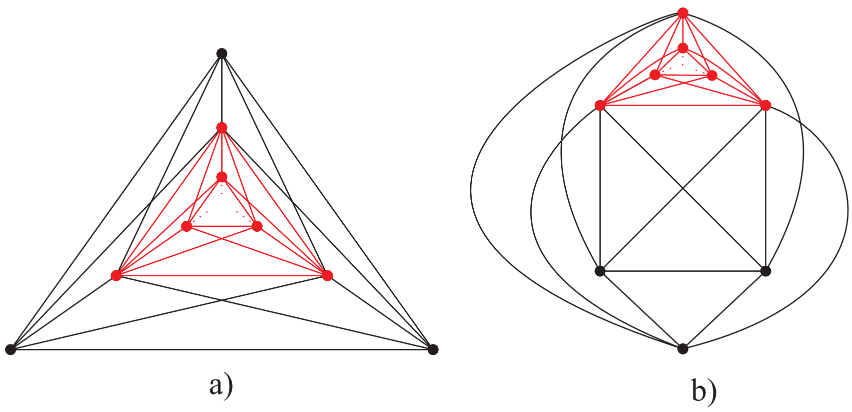
1-planárny graf G sa nazýva *maximálny 1-planárny*, ak je 1-planárny a $G + uv$ nie je 1-planárny pre žiadne dva nesusedné vrcholy u, v. V ďalšom budeme skúmať práve túto vlastnosť 1-planárnych grafov. V predchádzajúcej kapitole sme našli príklady n vrcholových grafov, ktoré dosahovali teoretickú maximálnu hranicu hrán $4n - 8$ pre všetky $n \geq 10$ a $n = 8$. Pre $n = 3k, k \geq 3$ zostrojíme nekonečnú množinu maximálnych 1-planárnych grafov s $4n - 9$ hranami.

Graf K_6 má 6 vrcholov a $\binom{6}{2} = 15$ hrán. Obsahuje faktorový podgraf rovinnú trianguláciu T s $3 \cdot 6 - 6 = 12$ hranami. Teda K_6 má presne 3 priesečníky. Asociovaný graf $D(K_6)^\times$ má potom $6+3=9$ vrcholov a $15+3\cdot 2=21$ hrán. To však opäť tvorí rovinnú trianguláciu s 9 vrcholmi, keďže $3\cdot 9-6=21$. Každá stena asociovaného grafu $D(K_6)^\times$ je trojuholník a podľa Eulerovho vzorca je ich presne 14 ($9-21+f=2$, $f=14$). Každý nepravý vrchol je incidentný so štyrmi 3-stenami. Samozrejme každá 3-stena je incidentná s najviac jedným nepravým vrcholom. Teda v grafe $D(K_6)^\times$ existujú práve dve 3-steny incidentné iba s pravými 5-vrcholmi. Tieto dve steny sú nesusedné. Zostávajú v takomto vzťahu aj v nakreslení $D(K_6)$. Buď je jedna z nich vo vnútri druhej alebo je každá vo vonkajšku druhej. Pridaním všetkých zvyšných hrán najprv vzniknú tri 4-steny a do nich sa vložia všetky diagonály (obrázok 7). Vezmime



Obrázok 7: 1-planárne nakreslenia K_6

teraz graf K_6 z obrázka 7a) a stotožnime jeho vonkajšie vrcholy s vrcholmi niektorej z „pravých“ 3-stien grafu na obrázku 7b) alebo s vrcholmi na vnútornej 3-stene ďalšej kópie grafu z obrázka 7a). Vznikne maximálny 1-planárny graf. Takýmto postupným vkladaním do 3-steny vieme vytvoriť nekonečnú množinu maximálnych 1-planárnych grafov s $n=3k, k\geq 3$ vrcholmi a $4n-9$ hranami (obrázok 8).



Obrázok 8: Maximálne 1-planárne grafy s $4n-9$ hranami

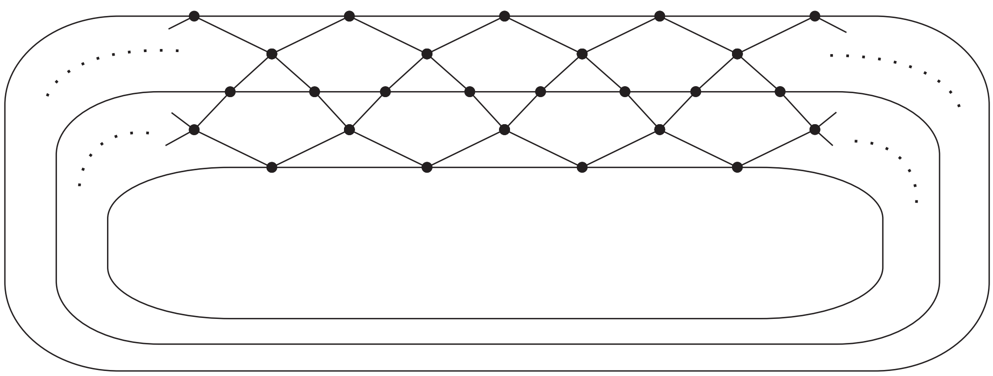
V predchádzajúcej kapitole sa ukázalo, že pre $n = 7$ a $n = 9$ sa horná hranica maximálneho počtu hrán $4n - 8$ nenadobúda. Ukážeme, že existuje maximálny 1-planárny graf so 7 vrcholmi a 18 hranami (graf $K_7 - K_{1,3}$). Tento poznatok spolu s grafom z obrázka 5 (maximálny 1-planárny graf so 7 vrcholmi a 19 hranami) takisto naznačuje, že nie všetky n-vrcholové maximálne 1-planárne grafy majú rovnaký počet hrán (zmena oproti planárnym grafom).

Lema 3.5. *Graf $K_7 - K_{1,3}$ je maximálny 1-planárny.*

Dôkaz. $K_7 - K_{1,3}$ je zrejme 1-planárny graf. Jeho podgrafom je K_6. Siedmy vrchol je možné pridať ku grafu K_6 vďaka symetrii dvoma spôsobmi. Buď do „pravej" 3-steny alebo do steny susednej s touto 3-stenou. Pridaním nových troch hrán vznikne maximálny 1-planárny graf. V každom prípade pridanie ďalšej hrany vynucuje aspoň 2 kríženia hrany. □

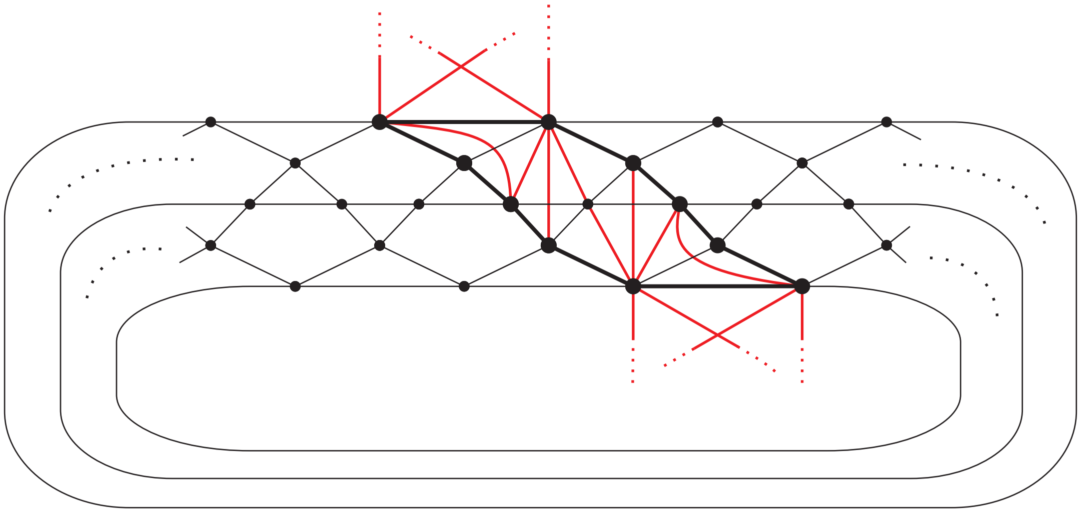
V ďalšom uvažujme 3-súvislé planárne grafy. Podľa Whitneyho vety sú všetky rovinné nakreslenia 3-súvislého planárneho grafu navzájom izomorfné. Pritom môžu existovať 1-planárne diagramy týchto grafov (príkladom je nakreslenie K_4 s jedným priesečníkom).

V.P.Korzhik a B.Mohar vo svojom článku [11] uvažujú triedu 3-súvislých planárnych grafov, ktoré nemajú vlastný 1-planárny diagram. To znamená, že každé nakreslenie grafu z danej triedy je bez priesečníkov, alebo v ňom existuje hrana preťatá aspoň dvakrát, a rovinné nakreslenie je vzhľadom k izomorfizmu jediné. Túto triedu označili ako *PN-grafy*. Ak nejaký 1-planárny graf G obsahuje ako podgraf PN-graf H, tak v každom nakreslení grafu G je podgraf H nakreslený rovnako. V danom článku [11] uviedli nutné podmienky pre PN-grafy a príklady PN-grafov. Na obrázku 9 je znázornený príklad nimi uvažovaného PN-grafu.



Obrázok 9: Príklad PN-grafu podľa [11]

Ide teda o 3-súvislý planárny graf, ktorého jediné nakreslenie do roviny je bez preťatia hrán. Každý 1-planárny graf, ktorý ho obsahuje, ho obsahuje v tej istej forme. Ak teda doplníme hrany na vytvorenie 1-planárneho grafu, tak vieme zaručiť, že PN-graf ako podgraf bude vždy rovnaký vzhľadom k izomorfizmu asociovaných grafov. Nech má PN-graf G z obrázka 9 na vnútornej kružnici $2k$ vrcholov, označme ich postupne $x_1, \ldots, x_{2k}$ (vrcholy na vonkajšej kružnici označme $y_1, \ldots, y_{2k}$). Potom má G zrejme spolu $12k$ vrcholov, všetky stupňa 4. Z toho vyplýva, že má $24k$ hrán. Doplňme teraz hrany $x_l x_{2k-l+1}$ a $y_l y_{2k-l+1}$ pre každé $2 \leq l \leq k-1$. Pridali sme spolu $2k-4$ hrán. Vznikne teda $2k-2$ nových 4-stien. V nich vieme doplniť vždy dve križujúce sa diagonály, čím doplníme ďalších $2.(2k-2) = 4k-4$ hrán.



Obrázok 10: Maximálne 1-planárne grafy s n vrcholmi a $\frac{23}{6}n - 8$ hranami

Podľa obrázka 10 môžeme graf G rozdeliť na vnútorne disjunktné konfigurácie ohraničené tučnými hranami. V každej z týchto konfigurácií vieme doplniť ešte 8 hrán (na obrázku červenou farbou), čo je spolu ďalších $16k$ hrán. Pridanie ľubovoľnej ďalšej hrany by spôsobilo stratu 1-planárnosti grafu (PN-podgraf). V takto zostrojenom maximálne 1-planárnom grafe máme $12k$ vrcholov a $46k - 8$ hrán, teda pre $n = 12k$ je počet hrán rovný $\frac{23}{6}n - 8$. Zostrojili sme tak nekonečnú množinu grafov, pre ktoré bude vedúci koeficient v počte hrán rovný $\frac{23}{6} < 4$.

Ostáva otvorenou otázkou, nakoľko ešte možno znížiť vedúci koeficient v počte hrán n-vrcholového maximálneho 1-planárneho grafu, resp. či pre niektoré $n \geq 12$ (resp. pre nekonečne veľa n) a pre každé $m \in [\frac{23}{6}n - 8, 4n - 8]$ existuje n-vrcholový maximálny 1-planárny graf s m hranami (inými slovami, ako sú rozložené medzery v spektre možných počtov hrán maximálnych 1-planárnych grafov s n vrcholmi).

3.3 Obvod grafu v triede 1-planárnych grafov

V ďalšom budeme používať označenie $\mathcal{P}_\delta$ (resp.$\mathcal{P}^1_\delta$) pre triedu planárnych (resp. 1-planárnych) grafov minimálneho stupňa $\geq \delta$; teda $\mathcal{P}^1_1$ je trieda všetkých 1-planárnych grafov. Poznamenajme, že $\mathcal{P}_\delta \subsetneq \mathcal{P}^1_\delta$ pre $\delta \in \{1, \ldots, 5\}$ a $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}^1_\delta = \emptyset$ pre $\delta \in \{6, 7\}$.

Nech $\mathcal{H}$ je trieda grafov a nech graf $G \in \mathcal{H}$. *Obvod* $g(G)$ grafu G je dĺžka najkratšej kružnice v grafe G. Definujme

$$g(\mathcal{H}) = \sup_{G \in \mathcal{H}} g(G).$$

Pre planárne grafy z faktu, že kružnica je planárny graf a z dôsledkov Eulerovho vzorca vyplýva, že $g(\mathcal{P}_1) = g(\mathcal{P}_2) = +\infty$, $g(\mathcal{P}_3) = 5$ a $g(\mathcal{P}_4) = g(\mathcal{P}_5) = 3$.

Pre 1-planárne grafy podľa [2] platí nasledovné tvrdenie:

Veta 3.6.

1. $g(\mathcal{P}^1_3) \geq 7$
2. $g(\mathcal{P}^1_5) = 4$
3. $g(\mathcal{P}^1_6) = g(\mathcal{P}^1_7) = 3$.

Dôkaz.

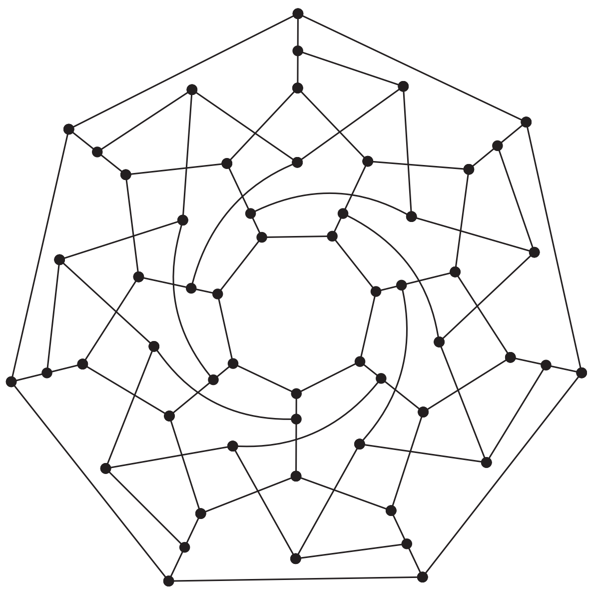
1. Graf na obrázku 11 je kubický graf s obvodom 7 a má 1-planárny diagram.
2. Najprv ukážeme, že $g(\mathcal{P}^1_5) \leq 4$. Predpokladajme, že existuje 1-planárny graf minimálneho stupňa 5, ktorého obvod je ≥ 5. Nech $D(G)$ je jeho 1-planárny diagram a nech $D(G)^\times = (V^\times, E^\times, F^\times)$. Poznamenajme, že $D(G)^\times$ má vrcholy stupňa 4, a to sú jedine nepravé vrcholy; všetky ostatné vrcholy v $D(G)^\times$ sú stupňa ≥ 5. Na dôkaz použijeme metódu prerozdeľovania náboja (viac o tejto metóde pozri v kapitole 4.1). Budeme postupovať podľa nasledujúcej schémy:

    - každej stene $f \in F^\times$ priradíme náboj $c(f) = 2 \cdot \deg_{D(G)^\times}(f) - 6$
    - každému vrcholu $v \in V^\times$ priradíme náboj $c(v) = \deg_{D(G)^\times}(v) - 6$

    Na základe Eulerovho vzorca platí

    $$\sum_{x \in F^\times \cup V^\times} c(x) = -12$$

    V ďalšom prerozdelíme prvotné náboje tak, aby konečný súčet nábojov bol rovnaký.



Obrázok 11: 1-planárny kubický graf s obvodom 7 podľa [2]

Budeme postupovať podľa nasledujúcich pravidiel:

(1.) Každá $\geq$4-stena odovzdá $\frac{2}{3}$ každému incidentnému 4-vrcholu.

(2.) Každá $\geq$4-stena s kladným nábojom po aplikovaní pravidla (1.) pošle svoj zvyškový náboj rovnomerne každému incidentnému 5-vrcholu.

Pomocné tvrdenie: Každá $\geq$4-stena posiela pri aplikovaní pravidla (2.) náboj $\geq \frac{1}{3}$ každému incidentnému 5-vrcholu.

Dôkaz. Nech f je k-stena, $k \geq 4$, nech $m_i(f)$, $i \in \{4, 5\}$ je počet i-vrcholov incidentných so stenou f. Potom $m_4(f) + m_5(f) \leq k$ a navyše $m_4(f) \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Po aplikácii pravidla (1.) bude zvyškový náboj steny f rovný $2k - 6 - \frac{2}{3} \cdot m_4(f) \geq 2k - 6 - \frac{2}{3} \cdot \lfloor \frac{k}{2} \rfloor > 0$. Z toho aplikovaním pravidla (2.) získa každý 5-vrchol incidentý s f náboj $\frac{2k-6-\frac{2}{3} \cdot m_4(f)}{m_5(f)} \geq \frac{2k-6-\frac{2}{3} \cdot \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}{m_5(f)} \geq \frac{2k-6-\frac{2}{3} \cdot \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}{k-m_4(f)} \geq \frac{2k-6-\frac{2}{3} \cdot \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}{k-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = \frac{2k-6-\frac{2}{3} \cdot \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \geq \frac{1}{3}$. □

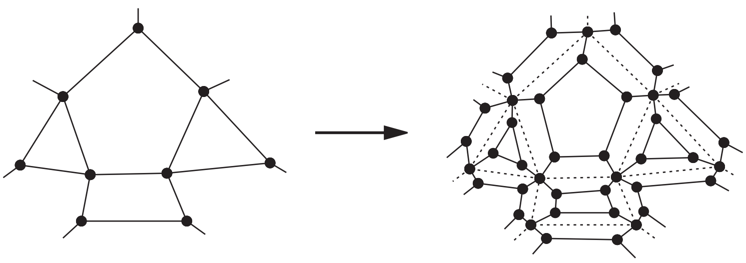
Chceme ukázať, že po takomto prerozdelení bude nový náboj $c^* : F^\times \cup V^\times \rightarrow \mathbb{Q}$ nezáporný, čo bude viesť k sporu. Rozoberieme tieto prípady.

1. Nech f je stena $D(G)^\times$. Ak je f 3-stena, tak $c^*(f) = c(f) = 2 \cdot 3 - 6 = 0$. Ak f je $\geq$4-stena, tak potom z charakteru pravidiel pre prerozdeľovanie náboja plynie, že $c^*(f) \geq 0$.

2. Nech v je 4-vrchol (nepravý vrchol v $D(G)^{\times}$). Potom je v incidentný s najviac jednou 3-stenou (inak by existovala 3- alebo 4- kružnica v $D(G)$ prechádzajúca susedmi v), a teda platí $c^*(v) \geq -2 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 0$.
3. Nech v je 5-vrchol; označme postupne susedné vrcholy v $D(G)^{\times}$ ako $v_1, \ldots, v_5$. Ak v je incidentný s aspoň tromi $\geq$4-stenami, tak $c^*(v) \geq -1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$. Teraz predpokladajme, že v je incidentný s aspoň tromi 3-stenami (v prípade štyroch 3-stien existuje už v $D(G)$ 3-kružnica). Žiadna z týchto 3-stien nemôže pozostávať iba z vrcholov $D(G)$, inak by existovala 3-kružnica v G. Z rovnakého dôvodu tu nie sú žiadne susedné 3-steny $[v_i v v_{i+1}], [v_{i+1} v v_{i+2}]$ také, že v_{i+1} je 4-vrchol. BUNV predpokladajme, že v_1, v_3, v_5 sú 4-vrcholy a $[v_1 v v_2], [v_2 v v_3], [v_4 v v_5]$ sú 3-steny. Nech α je stena incidentná s v_3, v, v_4. Potom je α $\geq$5-stena (inak $\alpha = [v v_3 y v_4]$, y je pravým vrcholom v $D(G)$ a $v v_2 y v_4$ je 4-kružnica v $D(G)$, čo je spor) a posiela vrcholu v náboj aspoň $\frac{2 \cdot 5 - 6 - 2 \cdot \frac{2}{3}}{3} = \frac{8}{9}$. Teda v prijme náboj aspoň $\frac{8}{9} + \frac{1}{3} = \frac{11}{9} > 1$. Potom platí $c^*(v) > 0$.
4. Nech v je k-vrchol, $k \geq 6$. Potom $c^*(v) = c(v) = k - 6 \geq 0$.

Zostrojili sme také prerozdelenie náboja, že $\sum\limits_{x \in F^{\times} \cup V^{\times}} c^*(x) \geq 0$, čo je spor.

Na dokázanie rovnosti $g(\mathcal{P}_5^1) = 4$ zostrojíme 1-planárny graf minimálneho stupňa 5 a obvodu 4. Použijeme na to konštrukciu nahradenia hrán šesťuholníkmi podľa [7]. Nech je daný rovinný graf G. Graf G' vytvoríme nasledovne: Nech každý vrchol $x \in V(G)$ je vrcholom grafu G'. Ku každej incidentnej dvojici (x, α) (kde x je vrchol a α je stena grafu G) pridajme nový vrchol v G'. Dva vrcholy $x_1', x_2' \in V(G')$ spojíme hranou (x_1', x_2' prislúchajú (x_1, α_1),(x_2, α_2)) ak $\{x_1, x_2\} \in E(G)$ a $\alpha_1 = \alpha_2$. Takisto spojíme hranou x_1' (prislúchajúce dvojici (x_1, α_1)) s vrcholom x_1 (viď obr. 12).



Obrázok 12: Nahradenie hrán šesťuholníkmi

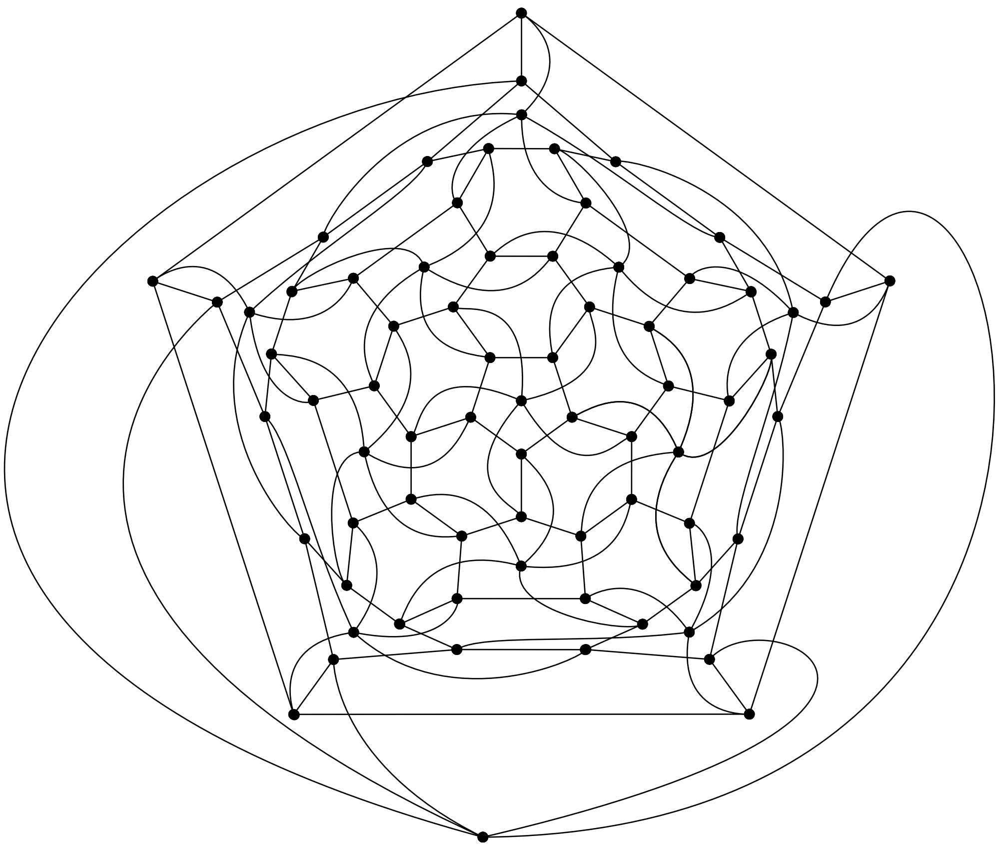
Uvažujme graf pravidelného dvadsaťstena a vykonajme konštrukciu nahradenia hrán šesťuholníkmi. V každej šesťuholníkovej stene

$[axx'by'y]$ (kde a, b sú vrcholy pôvodného dvadsaťstena) nahradíme hranu xx' 5-cestou $x_1 \dots x_5$ (kde $x = x_1$ a $x' = x_5$) a hranu yy' nahradíme 5-cestou $y_1 \dots y_5$ (kde $y = y_1$ a $y' = y_5$). Teraz pridáme nové hrany $x_1y_2, y_2x_3, x_3y_4, y_4x_5, y_1x_2, x_2y_3, y_3x_4, x_4y_5$. Asociovaný graf takto získaného grafu obsahuje dvadsať 12-stien. Do každej takejto steny (označme ju $[pu_1u_2u_3qv_1v_2v_3rw_1w_2w_3]$, kde p, q, r sú niektoré z pôvodne označených x, x', y, y') vložíme nový vrchol z a nové hrany $zu_1, zu_3, zv_1, zv_3, zw_1, zw_3, u_3v_2, v_3w_2, w_3u_2$. Takto zostrojený graf už vyhovuje našim podmienkam.

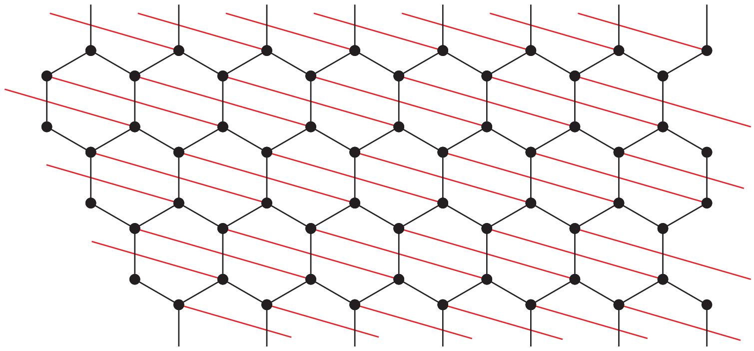
3. Tento výsledok vyplýva z ďalej uvedenej lemy 4.1 a obrázku 2. □

Otvoreným problémom zostáva určenie presnej hodnoty $g(\mathcal{P}^1_\delta)$ pre $\delta \in \{3, 4\}$.

R. Soták zostrojil 1-planárny graf minimálneho stupňa 4 a obvodu 5. Je teda zrejmé, že $g(\mathcal{P}^1_4) \geq 5$. Ide o nasledujúci graf na obrázku 13:



Obrázok 13: 1-planárny graf minimálneho stupňa 4 s obvodom 5



Obrázok 14: Nekonečný 1-planárny graf minimálneho stupňa 4 a obvodu 6

Vďaka príkladu nekonečného 1-planárneho grafu minimálneho stupňa 4 a obvodu 6 (nekonečné dláždenie roviny pravidelnými šesťuholníkmi s pridanými hranami, pozri obr.14) sa domnievame, že $g(\mathcal{P}_4^1) = 5$.

3.4 Hranová farebnosť 1-planárnych grafov

Nech $G = (V, E)$ je graf. Surjektívne zobrazenie $\varphi : E \to \{1, \ldots, k\}$ nazývame *hranové k-zafarbenie* grafu G. Zafarbenie sa nazýva *regulárne*, ak majú všetky susedné hrany priradenú inú farbu. Najmenšie také k, že pre G existuje regulárne hranové k-zafarbenie nazývame *hranové chromatické číslo* (*chromatický index*) a označujeme ho $\chi_1(G)$. Zrejme $\chi_1(G) \geq \Delta(G)$. Podľa Vizingovej vety platí pre ľubovoľný graf G nerovnosť $\Delta(G) \leq \chi_1(G) \leq \Delta(G) + 1$. Ak $\chi_1(G) = \Delta(G)$, tak hovoríme, že graf G je prvej kategórie. Inak hovoríme, že graf G je druhej kategórie. Hind a Zhao dokázali v [4] aj ďalšie známe tvrdenie: Každý planárny graf G s $\Delta(G) \geq 8$ je prvej kategórie. Toto tvrdenie neskôr vylepšili Sanders a Zhao v [14], keď ukázali, že každý planárny graf G s $\Delta(G) \geq 7$ je prvej kategórie. V ďalšom prezentujeme analogické tvrdenie pre 1-planárne grafy.

Definícia 5. Graf G nazývame *kritický*, ak G je súvislý a 2.kategórie, no po odstránení ľubovoľnej hrany sa chromatický index zníži. Ak G má maximálny stupeň Δ, tak ho nazývame Δ-*kritický*.

Veta 3.7 (Vizing's Adjacency Lemma [3]).
Nech G je Δ-kritický graf a vw je hrana G. Nech $\deg_G(v) = k$. Ak $k < \Delta$, tak w je v G susedný s aspoň $\Delta - k + 1$ vrcholmi stupňa Δ.

Veta 3.8. *Nech G je 1-planárny graf, $\Delta(G) \geq 14$. Potom G patrí do 1. kategórie.*

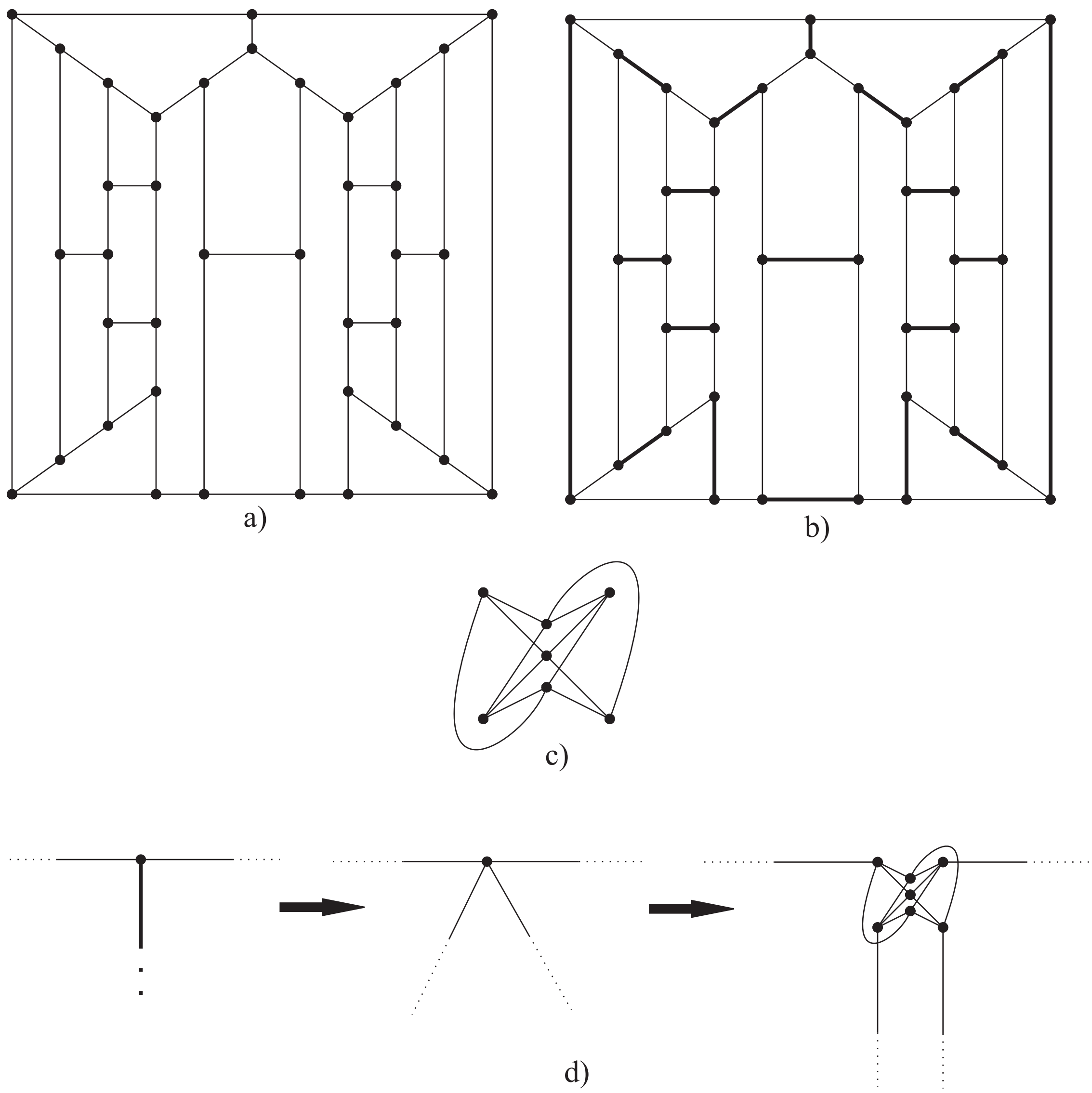
Dôkaz. Nech $G = (V, E)$ je 1-planárny graf 2.kategórie s $\Delta(G) \geq 14$. BUNV, nech G je Δ-kritický. Keďže G je 1-planárny, tak obsahuje vrchol $x \in V$ taký, že $\deg_G(x) \leq 7$. Nech S je množina vrcholov stupňa ≤ 7 ($S = \{x \in V, \deg_G(x) \leq 7\}$). Nech G' je graf indukovaný na vrcholoch $V \setminus S$. G' je tiež 1-planárny graf (je to podgraf G) a obsahuje tiež vrchol $w \in V \setminus S$, že $\deg_{G'}(w) \leq 7$. w je v G susedný s nejakým vrcholom $v \in S$ (poznamenajme, že $\deg_G(v) = k \leq 7 < \Delta$). Podľa vety 3.7 platí, že w musí byť susedný s aspoň $\Delta - k + 1 \geq \Delta - 6 > 7$ vrcholmi stupňa Δ, čo je spor. □

Otvorenou otázkou ostáva na akú hodnotu sa dá predpoklad o maximálnom stupni v predchádzajúcej vete znížiť.

3.5 Hamiltonovskosť 1-planárnych grafov

Kružnica v grafe prechádzajúca všetkými vrcholmi sa nazýva *hamiltonovská* kružnica a graf, ktorý obsahuje hamiltonovskú kružnicu sa nazýva *hamiltonovský*. *Spárením* nazývame množinu hrán, kde žiadne dve hrany nie sú susedné. Spárenie je *prefektné*, ak je každý vrchol grafu incidentný s nejakou hranou zo spárenia. V tejto časti budeme skúmať niekoľko ďalších vlastností 1-planárnych grafov súvisiacich s hamiltonovskosťou. Podľa Tutteovej vety je každý 4-súvislý planárny graf hamiltonovský. Nasledujúcou konštrukciou ukážeme, že existuje príklad 1-planárneho 4-súvislého grafu, ktorý nie je hamiltonovský. Použijeme na to Barnette-Bosák-Lederbergov graf (obr. 15a)). Je to najmenší planárny kubický 3-súvislý nehamiltonovský graf. V tomto grafe nájdeme perfektné spárenie (ako napr. na obr.15b)). Každú hranu zo spárenia zdvojíme. Takto získame multigraf, ktorý je 4-regulárny a zároveň 4-súvislý. Ďalej nakreslíme 1-planárny diagram bipartitného grafu $K_{3,4}$ podľa obrázka 15c). V grafe z obrázka 15b) nahradíme každý vrchol prirodzeným spôsobom už spomínaným diagramom $K_{3,4}$ (konštrukcia z obr.15d)) . Takto vznikne 4-súvislý 1-planárny graf, ktorý je nehamiltonovský (k nehamiltonovskosti grafu zostrojeného takouto konštrukciou pozri napr [8]). Otázkou ostáva pre aké k je k-súvislý 1-planárny graf hamiltonovský.

V ďalšom budeme označovať $w(P_k)$ *váhu* cesty P_k v grafe G, teda $w(P_k) = \sum\limits_{x \in V(P_k)} \deg_G(x)$. Mohar v [12] dokázal, že v každom 4-súvislom planárnom grafe s aspoň k vrcholmi existuje taká k-cesta P_k, že $w(P_k) \leq 6k - 1$. Uvedieme podobné tvrdenie pre 1-planárne grafy.



Obrázok 15: Barnette-Bosák-Lederbergov graf a konštrukcia

Veta 3.9. *V každom* 1*-planárnom hamiltonovskom grafe s aspoň* k *vrcholmi existuje taká* k*-cesta* P_k*, že* $w(P_k) \leq 8k - 1$.

Dôkaz. Podobne ako Moharov dôkaz pre planárne grafy:

Nech G je ľubovoľný 1-planárny hamiltonovský graf na n vrcholoch. Nech $C = v_1 v_2 \dots v_n v_1$ je jeho hamiltonovská kružnica. Pre $i = 1, \dots, n$ označme R_i k-cestu $v_i v_{i+1} \dots v_{i+k-1}$ (indexy modulo n), a nech $w(R_i)$ je váha cesty R_i. Platí:

$$\sum_{i=1}^{n} w(R_i) = k \cdot \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2k \cdot |E(G)| \leq 2k \cdot (4n - 8).$$

Potom jedna z ciest R_i musí mať $w(R_i) \leq \frac{2k \cdot (4n-8)}{n} = 8k - \frac{16k}{n} < 8k$ (inak by pre všetky $i = 1, \ldots, n$ bolo $w(R_i) > \frac{2k\cdot(4n-8)}{n}$, takže $\sum\limits_{i=1}^{n} w(R_i) > n \cdot \frac{2k\cdot(4n-8)}{n} = 2k\cdot(4n-8)$, čo je spor). Teda v G existuje taká k-cesta P_k, že $w(P_k) \leq 8k-1$.

□

4 Ľahké grafy

4.1 Základné definície

Dôsledok 3.3 je príkladom tvrdenia o existencii určitého podgrafu s vrcholmi malých stupňov v každom grafe z určitej triedy grafov. Ukazuje sa, že pre mnohé triedy rovinných i nerovinných grafov možno dokázať podobné tvrdenia, kde miesto vrchola vystupuje iný väčší podgraf. Úvahy tohto typu formálne zastrešuje definícia ľahkého grafu v triede grafov (prvýkrát sformulovaná v [5]):

Nech $\mathcal{H}$ je trieda grafov a nech H je súvislý graf taký, že aspoň jeden z grafov triedy $\mathcal{H}$ obsahuje podgraf izomorfný s H. Nech $\varphi(H,\mathcal{H})$ je najmenšie celé číslo s vlastnosťou, že každý graf $G \in \mathcal{H}$, ktorý obsahuje podgraf izomorfný s H, obsahuje aj podgraf $K \cong H$ taký, že

$$\max_{x\in V(K)} \deg_G(x) = \varphi(H,\mathcal{H}).$$

Podobne nech $w(H,\mathcal{H})$ je najmenšie celé číslo s vlastnosťou, že každý graf $G \in \mathcal{H}$, ktorý obsahuje podgraf izomorfný s H, obsahuje aj podgraf $K \cong H$ taký, že

$$\sum_{x\in V(K)} \deg_G(x) = w(H,\mathcal{H}).$$

Ak také celé číslo neexistuje, tak píšeme $\varphi(H,\mathcal{H}) = +\infty$ (podobne pre $w(H,\mathcal{H})$). Hovoríme, že graf H je *ľahký* v triede grafov $\mathcal{H}$ ak $\varphi(H,\mathcal{H}) < +\infty$ (alebo $w(H,\mathcal{H}) < +\infty$), inak hovoríme, že graf H je *ťažký* v triede $\mathcal{H}$. Teda H je ťažký v triede $\mathcal{H}$, ak pre každé celé číslo m existuje graf $G_m \in \mathcal{H}$ taký, že každá izomorfná kópia grafu H v G_m obsahuje vrchol stupňa $\geq m$ v G_m. Množina ľahkých grafov v triede $\mathcal{H}$ je označená $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Teória ľahkých grafov v rôznych triedach rovinných grafov je pomerne rozvinutá (pozri napr. prehľadový článok [6]); naproti tomu, výskum ľahkých grafov v triede 1-planárnych grafov je len v začiatkoch.

Všetky výsledky nasledujúcej kapitoly sme získali rovnakým princípom - *metódou prerozdeľovania náboja* (angl. *discharging method*). Dokazujeme sporom a predpokladáme existenciu 1-planárneho grafu G, ktorý neobsahuje daný ľahký podgraf. V grafe $D(G)^{\times} = (V^{\times}, E^{\times}, F^{\times})$ sa definuje prvotný náboj $c : V^{\times} \cup F^{\times} \to \mathbb{Z}$ podľa nasledujúcich schém:

Schéma 1: $c(v) = 2 \cdot \deg_{D(G)^{\times}}(v) - 6$ pre každý vrchol $v \in V^{\times}$ a
$c(f) = \deg_{D(G)^{\times}}(f) - 6$ pre každú stenu $f \in F^{\times}$

Schéma 2: $c(v) = \deg_{D(G)^{\times}}(v) - 6$ pre každý vrchol $v \in V^{\times}$ a
$c(f) = 2 \cdot \deg_{D(G)^{\times}}(f) - 6$ pre každú stenu $f \in F^{\times}$

Schéma 3: $c(v) = \deg_{D(G)^{\times}}(v) - 4$ pre každý vrchol $v \in V^{\times}$ a
$c(f) = \deg_{D(G)^{\times}}(f) - 4$ pre každú stenu $f \in F^{\times}$

Podľa dôsledkov Eulerovho vzorca platí $\sum\limits_{x \in F^{\times} \cup V^{\times}} c(x) = -12$ pre schému 1 a schému 2, $\sum\limits_{x \in F^{\times} \cup V^{\times}} c(x) = -8$ pre schému 3. V ďalšom prerozdelíme prvotný náboj medzi vrcholmi a stenami $D(G)^{\times}$ podľa určitých pravidiel, pričom celková suma nábojov zostane nezmenená. V dôkaze skúmame lokálnu štruktúru grafu a pre uvažovaný podgraf očakávame, že obsahuje vrchol dostatočne veľkého stupňa. Po takomto prerozdelení získame nový náboj $c^{*} : V^{\times} \cup F^{\times} \to \mathbb{Q}$ $\Big(\sum\limits_{x \in F^{\times} \cup V^{\times}} c(x) = \sum\limits_{x \in F^{\times} \cup V^{\times}} c^{*}(x)\Big)$. Pre dosiahnutie sporu ukážeme, že pre každý prvok $x \in V^{\times} \cup F^{\times}$ je $c^{*}(x) \geq 0$, z čoho vyplýva $\sum\limits_{x \in F^{\times} \cup V^{\times}} c^{*}(x) \geq 0$. Prvok $x \in F^{\times} \cup V^{\times}$, ktorý bude mať kladný náboj, budeme nazývať *prebitý*. Naopak prvok $x \in F^{\times} \cup V^{\times}$, ktorý bude mať záporný náboj, budeme nazývať *nedobitý*.

4.2 Ľahké grafy v triede 1-planárnych grafov s $\delta = 5,\ 6$

Podľa [2] po pozmenenom pravidle (2.) platí:

Lema 4.1. *Každý* 1*-planárny graf minimálneho stupňa* 6 *obsahuje takú kružnicu* C_3*, že každý jej vrchol je stupňa* ≤ 10.

Dôkaz. Na dôkaz použijeme metódu prerozdeľovania náboja so schémou 2. Poznamenajme, že $D(G)^{\times}$ má vrcholy minimálneho stupňa 4 (nepravé vrcholy), nemá žiadne 5-vrcholy a s vrcholmi stupňa 4 sú susedné vrcholy stupňa ≥ 6. Vrcholy stupňa ≥ 11 budeme nazývať veľké vrcholy. V ďalšom prerozdelíme prvotné náboje vrcholov a stien podľa nasledujúcich pravidiel:

(1.) Každá $\geq$4-stena f odovzdá $\frac{c(f)}{m_4(f)}$ každému 4-vrcholu incidentnému so stenou f ($m_4(f)$ je počet 4-vrcholov incidentných so stenou f). Ak $m_4(f) = 0$, tak sa neposiela žiadny náboj.

(2.) Každý veľký vrchol x posiela náboj $\frac{c(x)}{n'_4(x)}$ každému susednému 4-vrcholu y takému, že hrana xy je inciduje s aspoň jednou 3-stenou ($n'_4(x)$ je počet 4-vrcholov susediacich s x, ktoré majú horeuvedenú vlastnosť). Ak $n'_4(x) = 0$, náboj sa neodovzdáva.

Uvažujme nasledujúce prípady:

1. Nech f je r-stena grafu $D(G)^\times$. Ak $r = 3$, tak $c^*(x) = c(x) = 0$. Inak je f buď úplne vybitá na 0 (pravidlo (1.)) alebo si zachová svoj prvotný náboj, ktorý bol kladný. Poznamenajme, že $m_4(f) \leq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ a nakoniec každá $\geq$4-stena posiela náboj $\frac{2 \cdot r - 6}{m_4(f)} \geq \frac{2 \cdot r - 6}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \geq 1$ každému incidentnému 4-vrcholu.

2. Nech x je d-vrchol grafu $D(G)^\times$. Ak $6 \leq d \leq 10$, tak vrchol x má prvotný náboj nezáporný a ten sa počas prerozdeľovania nemení. Podľa pravidla (2.) je ľahko vidieť, že $c^*(x) \geq 0$ ak $d \geq 11$. Predpokladajme, že $d = 4$. Ak x je incidentný s aspoň dvomi $\geq$4-stenami, tak $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot 1 = 0$. Inak je x incidentný s buď tromi alebo štyrmi 3-stenami. V prvom prípade tri 3-steny incidentné s x tvoria dve kružnice C_3 v G. Zrejme potom aspoň jeden susedný vrchol vrchola x musí byť veľký. Keďže $n'_4(x) \leq \lfloor \frac{11}{2} \rfloor$, je $c^*(x) \geq -2+1+\frac{11-6}{\lfloor \frac{11}{2} \rfloor} = 0$. V druhom prípade všetky steny incidentné s vrcholom x tvoria štyri 3-kružnice v G. Teda aspoň dva susedné vrcholy vrchola x sú $\geq$11-vrcholy a $c^*(x) \geq -2+2 \cdot \frac{11-6}{\lfloor \frac{11}{2} \rfloor} = 0$.

Zostrojili sme také prerozdelenie náboja, že

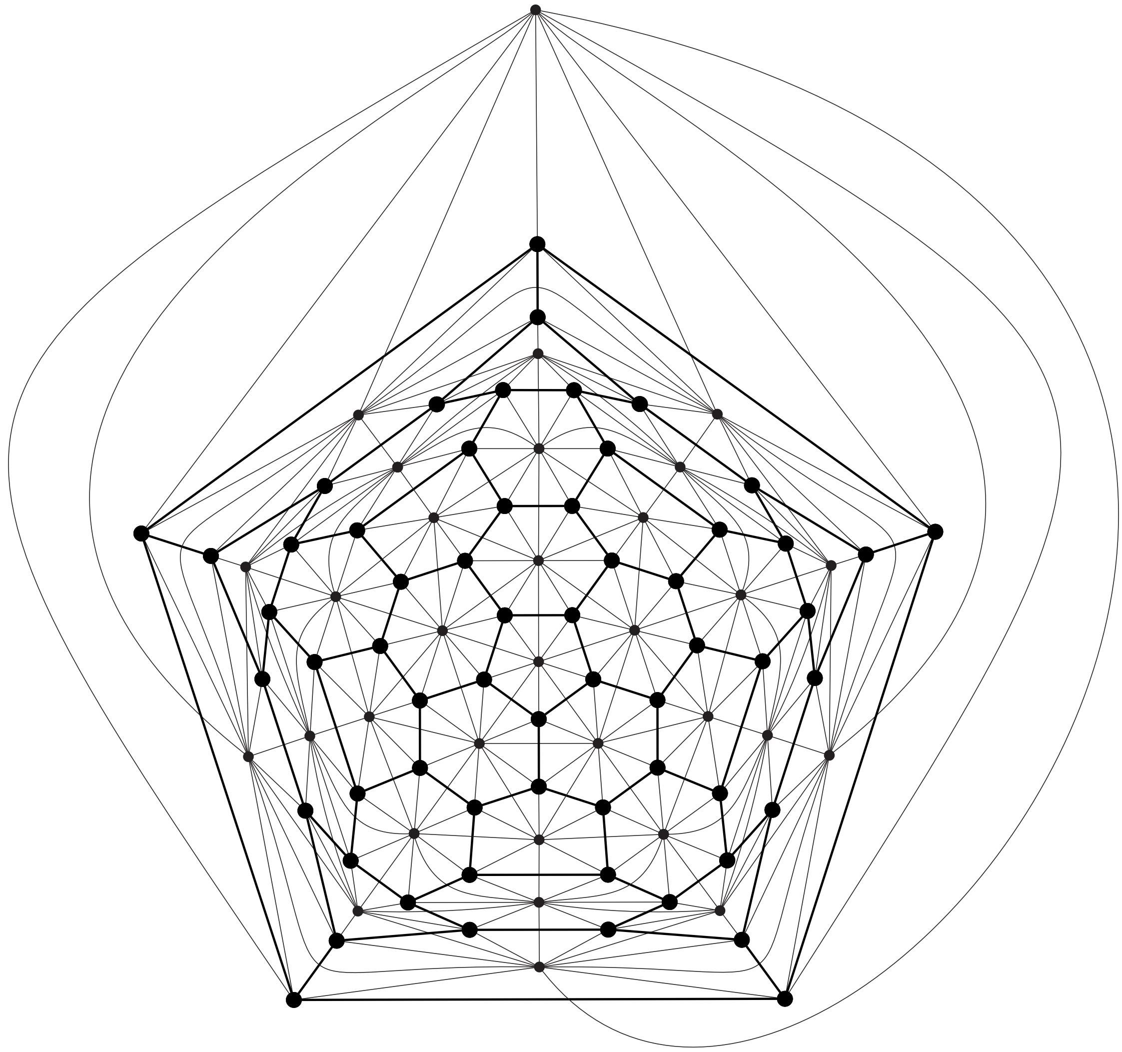
$$\sum_{x \in F^\times \cup V^\times} c^*(x) \geq 0,$$

čo je spor. $\square$

Daný graf na obrázku 16 je 1-planárny graf minimálneho stupňa 6. Každý podgraf izomorfný s C_3 v ňom obsahuje vrchol stupňa $\geq$ 10. Teda hodnota 10 z článku [2] je najlepšia možná.

Veta 4.2. *Každý* 1*-planárny graf minimálneho stupňa* 5 *a minimálneho obvodu* 4 *obsahuje takú kružnicu* C_4*, že každý jej vrchol je stupňa* ≤ 9.

Dôkaz. Na dôkaz použijeme metódu prerozdeľovania náboja podľa schémy 2. Vrchol stupňa ≥ 10 budeme nazývať veľký. Taktiež budeme používať špeciálne označenia. Pre daný d-vrchol x budeme označovať susedné vrcholy v $D(G)^\times$ ako $x_1, x_2, \ldots, x_d$ v zápornom smere. f_i, $i = 1, \ldots, d$ označíme stenu grafu $D(G)^\times$, ktorá je incidentná s vrcholmi x_i, x, x_{i+1}(index modulo d). Ak f_i je 4-stena tak $\hat{x}_i$ budeme označovať



Obrázok 16: 1-planárny graf minimálneho stupňa 6

spoločného suseda x_i a x_{i+1} rôzneho od x. Pravidlá pre prerozdeľovanie náboja sú nasledovné:

(1.) Každá stena $f \in F^\times$ odovzdá $\frac{c(f)}{m_{4,5}(f)}$ každému incidentnému 4- alebo 5-vrcholu ($m_{4,5}(f)$ je počet incidentných 4- alebo 5-vrcholom so stenou f; ak $m_{4,5}(f) = 0$, žiaden náboj sa neodovzdáva).

(2.) Každý veľký vrchol odovzdá každému susednému vrcholu $\frac{2}{5}$.

Nech $\bar{c}(v)$ označuje náboj vrchola $v \in V^\times$ po aplikovaní pravidiel (1.) a (2.).

(3.) Každý 5-vrchol v s $\bar{c}(v) > 0$ prepošle náboj $\frac{\bar{c}(v)}{n_4(v)}$ každému susednému 4-vrcholu ($n_4(v)$ je počet 4-vrcholov susedných s vrcholom v; ak $n_4(v) = 0$, žiaden náboj sa neodovzdáva).

Pre každý veľký d-vrchol platí po aplikovaní pravidla (2.): $d - 6 - \frac{2}{5} \cdot d \geq 0$ pre $d \geq 10$.

Vrcholy stupňa $6 \leq d \leq 9$ majú pri prvotnom nabití náboj ≥ 0. Použitím pravidiel neodovzdávajú žiadny náboj. Preto budeme v ďalšom skúmať iba vrcholy stupňa < 6.

Každá r-stena má po aplikovaní pravidiel náboj nulový (ak $r = 3$ alebo je stena incidentná s nejakým 4- alebo 5-vrcholom) alebo nezáporný (pre $r \geq 4$ bez incidentných 4- alebo 5-vrcholov).

1. Nech x je 5-vrchol. Jeho prvotný náboj je $c(x) = -1$. 5-vrchol x môže byť incidentný s najviac tromi 3-stenami (inak by spolu s niektorými dvomi susedmi indukoval C_3, čo je spor). To znamená, že x inciduje s aspoň dvomi $\geq$4-stenami, teda podľa pravidla (1.) je $c^*(x) \geq -1 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 - 6}{4} = 0$.

2. Nech x je 4-vrcholom; potom x je priesečníkovým (nepravým) vrcholom v $D(G)^\times$. Teda všetky jeho susedné vrcholy sú už pravé vrcholy stupňa aspoň 5. Každý 4-vrchol x je incidentný s najviac ak dvomi 3-stenami, a ak práve s dvomi, tak sú nesusedné (inak by sa v okolí vrchola x indukovala kružnica C_3, čo je spor).

   2.1. Ak vrchol x nie je incidentný so žiadnou 3-stenou, tak má po použití pravidla (1.) náboj $c^*(x) \geq -2 + 4 \cdot \frac{2 \cdot 4 - 6}{4} = -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$.

   2.2. Nech x je incidentný s práve jednou 3-stenou (BUNV nech je to f_4). Ak niektorá zo stien f_1, f_2, f_3 je $\geq$6-stena, tak x bude mať náboj $c^*(x) \geq -2+2 \cdot \frac{2 \cdot 4 - 6}{4} + \frac{2 \cdot 6 - 6}{6} = -2+2 \cdot \frac{1}{2}+1 = 0$. Podobne, ak sú aspoň dve zo stien f_1, f_2, f_3 $\geq$5-steny, potom má x náboj $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 5 - 6}{5} + \frac{2 \cdot 4 - 6}{4} = -2 + \frac{8}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{10} > 0$. Preto môžeme uvažovať ďalej tieto prípady:

      2.2.1. Nech práve jedna zo stien f_1, f_2, f_3 je 5-stena. Predpokladajme najprv, že f_1 je 5-stena (prípad steny f_3 je symetrický). Ak f_1 je incidentná s aspoň jedným $\geq$6-vrcholom, tak $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 5 - 6}{5 - 1} = 0$. Ďalej, ak x_3 je $\geq$6-vrchol, tak $c^*(x) = -2 + \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 - 6}{4 - 1} = \frac{2}{15} > 0$. Môžeme teda predpokladať, že obidva vrcholy x_2 a x_3 sú 5-vrcholy. Potom každý z nich je incidentný s aspoň tromi $\geq$4-stenami, takže $\bar{c}(x_2) \geq -1 + \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$, $\bar{c}(x_3) \geq -1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Pre vrchol x potom po uplatnení všetkých pravidiel platí $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{\frac{4}{5}}{5} + \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{3}{50} > 0$.

Ďalej nech f_2 je 5-stena. Ak aspoň jeden z vrcholov x_2, x_3 je $\geq$6-vrchol, tak $c^*(x) \geq -2 + \frac{1}{2} + \frac{2\cdot4-6}{4-1} + \frac{2\cdot5-6}{5-1} = \frac{1}{6} > 0$. Nech sú teraz oba vrcholy x_2, x_3 5-vrcholy. Potom opäť x_2 a x_3 sú incidentné s aspoň tromi $\geq$4-stenami a $\bar{c}(x_2) \geq -1 + \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$, $\bar{c}(x_3) \geq -1 + \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$. Z toho $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{\frac{4}{5}}{5} = \frac{3}{25} > 0$.

2.2.2. Nech sú všetky f_1, f_2, f_3 4-steny. Ak by oba vrcholy x_2, x_3 boli $\geq$6-vrcholy, tak $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot \frac{2\cdot4-6}{3} + \frac{2\cdot4-6}{2} = \frac{1}{3} > 0$. Takisto je ľahké vidieť, že $c^*(x) \geq 0$ ak dva z vrcholov $x_1, \ldots, x_4$ (okrem x_1, x_4) sú stupňa $\geq$ 6. Ak oba z vrcholov x_1, x_4 sú $\geq$6-vrcholy, tak $\bar{c}(x_2) \geq -1 + \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ (analogicky pre x_3) a $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{1}{10} > 0$. Navyše ak aspoň jeden z vrcholov $x_1, \ldots, x_4$ je veľký, tak $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1}{15} > 0$. V ďalšej analýze budeme predpokladať, že tieto prípady nenastávajú.

2.2.2.1. Nech aspoň jeden z vrcholov $\hat{x}_1, \hat{x}_3$ je pravým vrcholom, BUNV $\hat{x}_1$. Keďže $x_4 x_2 \hat{x}_1 x_1$ je 4-kružnica v G, $\hat{x}_1$ musí byť nutne veľký vrchol. Ak jeden z dvojice x_1, x_2 je $\geq$6-vrchol, tak $c^*(x) \geq -2 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$. Nech sú oba vrcholy x_1, x_2 5-vrcholy. Potom $\bar{c}(x_1) \geq -1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{17}{30}$, $\bar{c}(x_2) \geq -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$, $n_4(x_1) \leq 3$, $n_4(x_2) \leq 4$ a $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{\frac{17}{30}}{3} + \frac{\frac{16}{15}}{4} = \frac{11}{90} > 0$.

2.2.2.2. Nech sú oba vrcholy $\hat{x}_1, \hat{x}_3$ nepravými vrcholmi.

2.2.2.2.1. Predpokladajme, že $\hat{x}_2$ je pravý vrchol. Najprv nech nie je veľký. Nech jeden z vrcholov x_2, x_3 je $\geq$6-vrchol, BUNV nech je to x_2, Nech x_3 je 5-vrchol. Ak x_3 má za suseda veľký vrchol, tak $\bar{c}(x_3) \geq -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$, $n_4(x_3) \leq 3$ a $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{16}{15}}{3} = \frac{17}{90} > 0$. Ak x_3 nemá za suseda veľký vrchol, tak stena f', ktorá má so stenou f_3 spoločnú hranu $x_3\hat{x}_3$, nemôže byť 3-stena (inak je porušená 1-planarita G alebo vznikne ľahká 4-kružnica). Navyše keďže $\hat{x}_2$ je pravý vrchol, najmenej jedna zo zvyšných dvoch stien incidentných s x_3 (rôznych od f_2, f_3, f') je $\geq$4-stena. Z toho získavame $\bar{c}(x_3) \geq -1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$, $n_4(x_3) \leq 4$ a $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{7}{6}}{4} = \frac{1}{8} > 0$. Zostáva vyriešiť prípad ak $\hat{x}_2$ nie je veľký vrchol a obe vrcholy x_2, x_3 sú 5-vrcholy. Vypočítajme náboj vrchola x_2 po aplikovaní prvých dvoch pravidiel prerozdeľovania (prípad pre x_3 je analogický). Ak x_2 je incidentný s najviac jednou 3-stenou, tak $\bar{c}(x_2) \geq -1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 1$, $n_4(x_2) \leq 4$, teda x_2

prepošle vrcholu x podľa pravidla (3.) aspoň $\frac{1}{4}$. Nech x_2 je incidentný s práve dvomi 3-stenami. Ak stena f'', ktorá má spoločnú hranu $\hat{x}_1x_2$ so stenou f_1, je 3-stena, tak vrchol $u \in f''$, $u \neq x_2, \hat{x}_1$ je nutne veľký ($x_1ux_2x_4$ tvorí 4-kružnicu). Dostávame $\bar{c}(x_2) \geq -1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$, $n_4(x_2) \leq 3$, teda x_2 odovzdá vrcholu x podľa pravidla (3.) aspoň $\frac{\frac{9}{10}}{3} = \frac{3}{10} > \frac{1}{4}$ náboja. Ak f'' je $\geq$4-stena, potom použitím faktu, že $\hat{x}_2$ je pravý vrchol získavame, že x_2 je incidentný s najmenej štyrmi $\geq$4-stenami. Teda $\bar{c}(x_2) \geq -1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 1$, $n_4(x_2) \leq 4$, teda x_2 prepošle vrcholu x podľa pravidla (3.) aspoň $\frac{1}{4}$. Záverom môžeme prehlásiť, že každý z vrcholov x_2, x_3 posiela aspoň $\frac{1}{4}$ vrcholu x, a teda $c^*(x) \geq -2 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 0$.

Predpokladajme teraz, že $\hat{x}_2$ je veľký vrchol. Ak niektorý z vrcholov x_2, x_3 je $\geq$6-vrchol, tak $c^*(x) \geq -2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{6} > 0$. Nech sú teda oba vrcholy x_2, x_3 5-vrcholy. Potom $\bar{c}(x_2) \geq -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$, $\bar{c}(x_3) \geq -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$ a $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{\frac{16}{15}}{4} = \frac{1}{5} > 0$.

2.2.2.2.2. Nech každý z vrcholov $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ je nepravý vrchol.

2.2.2.2.2.1. Predpokladajme najprv, že práve jeden z $x_1, \ldots, x_4$ je $\geq$6-vrchol. Vďaka symetrii môžeme uvažovať, že je to x_1 alebo x_2. Nech najprv x_1 je $\geq$6-vrchol. Ak x_4 je incidentný s najviac dvomi 3-stenami, tak $\bar{c}(x_4) \geq -1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $n_4(x_4) \leq 4$ a x_4 prepošle vrcholu x podľa pravidla (3.) aspoň $\frac{1}{8}$. Ďalej nech x_4 je incidentný s práve tromi 3-stenami. Potom hrana $\hat{x}_3x_4$ je incidentná s 3-stenou $[\hat{x}_3x_4u]$. Keďže $x_4x_1x_3u$ je 4-kružnica v G, u je veľký a $\bar{c}(x_4) \geq -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$, $n_4(x_4) \leq 3$ a x_4 prepošle vrcholu x podľa pravidla (3.) aspoň $\frac{2}{15} > \frac{1}{8}$. Takže $\bar{c}(x_2) \geq -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, $\bar{c}(x_3) \geq -1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, a $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{8} + \frac{\frac{2}{3}}{5} + \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{40} > 0$.

Nech teraz x_2 je $\geq$6-vrchol. Potom $\bar{c}(x_1) \geq -1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$, $\bar{c}(x_3) \geq -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ a $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{6}}{4} + \frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{1}{120} > 0$.

2.2.2.2.2.2. Nech všetci susedia x sú 5-vrcholy. Poznamenajme, že každý z x_2, x_3 je incidentný s aspoň tromi $\geq$4-stenami. To znamená, že každý z nich preposiela aspoň $\frac{-1+3 \cdot \frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$

vrcholu x podľa pravidla (3.) (ak sú x_2, x_3 incidentné s aspoň štyrmi $\geq$4-stenami, tak príspevok vrcholu x je aspoň $\frac{-1+4\cdot\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{4} > \frac{1}{8}$). Ak obidva vrcholy x_1, x_4 sú incidentné s aspoň tromi $\geq$4-stenami, tak $c^*(x) \geq -2+3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{8} = 0$. Ďalej BUNV predpokladajme, že x_1 je incidentný s práve dvomi $\geq$4-stenami. Potom je zrejmé, že existuje 3-stena $[x_1\hat{x}_1 w]$. Keďže $x_4x_1wx_2$ je 4-kružnica v G, w musí byť veľký vrchol. Následne $n_4(x_1) = 3$, $\bar{c}(x_1) \geq -1+2\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ a x_1 preposiela vrcholu x náboj $\frac{\frac{2}{5}}{3} = \frac{2}{15} > \frac{1}{8}$. Analogická úvaha platí vďaka symetrii aj pre vrchol x_4. Potom $c^*(x) \geq -2+3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{2}{15} = \frac{1}{60} > 0$.

2.3. Nech x je incidentný s práve dvomi 3-stenami. BUNV nech sú to f_4 a f_2. Potom jeden z vrcholov $x_1, \ldots, x_4$ musí byť veľký. BUNV nech je to x_1. Ak aj ďalší susedný vrchol vrchola x je veľký, tak $c^*(x) \geq -2+2\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{15} > 0$ alebo $c^*(x) \geq -2+1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{10} > 0$. Takisto ak f_3 je incidentná s aspoň dvomi $\geq$6-vrcholmi, tak $c^*(x) \geq -2+1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5} = \frac{1}{15} > 0$. Podobne, $c^*(x) > 0$ ak f_1 je incidentná s aspoň dvomi $\geq$6-vrcholmi a f_3 s aspoň jedným $\geq$6-vrcholom. Analyzujeme nasledujúce prípady:

2.3.1. Nech x_2, x_3, x_4 sú 5-vrcholy. Ak f_1 je $\geq$5-stena, tak $\bar{c}(x_2) \geq -1+1+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $n_4(x_2) \leq 4$, $\bar{c}(x_4) \geq -1+2\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$, $n_4(x_4) \leq 4$ a $c^*(x) \geq -2+1+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{2}{5}}{4}+\frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8} > 0$. Podobne, ak f_3 je $\geq$5-stena, tak $\bar{c}(x_4) \geq -1+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5} = \frac{7}{10}$, $n_4(x_4) \leq 4$, $\bar{c}(x_2) \geq -1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, $n_4(x_2) \leq 4$ a $c^*(x) \geq -2+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{7}{10}}{4}+\frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{12} > 0$.
Ďalej predpokladajme, že obidve steny f_1 a f_3 sú 4-steny. Môžeme navyše predpokladať, že $\hat{x}_3$ je nepravý vrchol (inak by bol $\hat{x}_3$ veľký, keďže $\hat{x}_3x_3x_2x_4$ je 4-kružnica a platí $\bar{c}(x_3) \geq -1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5} = \frac{17}{30}$, $n_4(x_3) \leq 3$, $\bar{c}(x_4) \geq -1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+2\cdot\frac{2}{5} = \frac{29}{30}$, $n_4(x_4) \leq 3$ a $c^*(x) \geq -2+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{17}{30}}{3}+\frac{\frac{29}{30}}{3} = \frac{11}{45} > 0$).

2.3.1.1. Nech hrany $\hat{x}_3x_3$, $\hat{x}_3x_4$ sú incidentné iba s $\geq$4-stenami. V tomto prípade máme $\bar{c}(x_3) \geq -1+3\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\bar{c}(x_4) \geq -1+3\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5} = \frac{9}{10}$, $n_4(x_3) \leq 4$, $n_4(x_4) \leq 4$. Ak $n_4(x_4) \leq 3$ tak $c^*(x) \geq -2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{9}{10}}{3}+\frac{\frac{1}{2}}{4}+\frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{30} > 0$. Teraz nech $n_4(x_4) = 4$. Ak $n_4(x_3) \leq 3$ tak $c^*(x) \geq -2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{9}{10}}{4}+\frac{\frac{1}{2}}{3}+\frac{\frac{1}{6}}{4} = 0$. Nech teda platí aj $n_4(x_3) = 4$. Uvažujme teraz steny $\alpha, \beta, \gamma, f_2, f_3$, v kladnej orientácii okolo vrchola x_3. Môžeme predpokladať, že γ je 3-stena (inak $c^*(x) \geq -2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{9}{10}}{4}+\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{12} > 0$). Ak niektorá zo stien α, β je $\geq$5-stena, tak $\bar{c}(x_3) \geq -1+2\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ a $c^*(x) \geq -2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{9}{10}}{4}+\frac{\frac{4}{5}}{4}+\frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{30} > 0$. Preto nech $\alpha = [x_3\hat{x}_3yw]$, $\beta = [x_3wzq]$ sú 4-steny. Keďže x_2x_4yz je 4-kružnica v G, jeden z vrcholov y, z musí byť veľký. Potom $\bar{c}(x_3) \geq -1+2\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ a $c^*(x) \geq -2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{9}{10}}{4}+\frac{\frac{2}{3}}{4}+\frac{\frac{1}{6}}{4} = 0$.

2.3.1.2. Nech hrana $\hat{x}_3x_4$ je incidentná s práve jednou $\geq$4-stenou f_3, potom $[\hat{x}_3x_4w']$ je 3-stena. Keďže $x_4w'x_3x_2$ je 4-kružnica v G, w' musí byť veľký vrchol. Navyše aspoň jedna z hrán $w'x_4$, x_1x_4 je incidentná s $\geq$4-stenou. Preto $\bar{c}(x_4) \geq -1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+2\cdot\frac{2}{5} = \frac{29}{30}$, $n_4(x_4) \leq 3$. Ak hrana $x_3\hat{x}_3$ je incidentná s dvomi $\geq$4-stenami, tak $\bar{c}(x_3) \geq -1+3\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $n_4(x_3) \leq 4$ a $c^*(x) \geq -2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{29}{30}}{3}+\frac{\frac{1}{2}}{4}+\frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{18} > 0$. Teda, nech hrana $x_3\hat{x}_3$ je incidentná s práve jednou $\geq$4-stenou f_3. Potom stena $[x_3\hat{x}_3w'']$ je 3-stenou. Keďže $x_4x_2x_3w''$ je 4-kružnica v G, tak w'' musí byť veľký. Kvôli tomu dostávame $\bar{c}(x_3) \geq -1+2\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$, $n_4(x_3) \leq 3$ a $c^*(x) \geq -2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{29}{30}}{3}+\frac{\frac{2}{5}}{3}+\frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{23}{360} > 0$.

2.3.1.3. Nech hrana $\hat{x}_3x_3$ je incidentná s práve jednou $\geq$4-stenou f_3; potom $[\hat{x}_3x_3w'']$ je 3-stena. Opäť, $w''x_4x_2x_3$ je 4-kružnica v G, a teda w'' musí byť veľký vrchol. Ak hrana x_3w'' je incidentná s nejakou $\geq$4-stenou, tak $\bar{c}(x_3) \geq -1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5} = \frac{17}{30}$, $n_4(x_3) \leq 3$, $\bar{c}(x_4) \geq -1+3\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5} = \frac{9}{10}$, $n_4(x_4) \leq 4$ a $c^*(x) \geq -2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{17}{30}}{3}+\frac{\frac{9}{10}}{4}+\frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{45} > 0$. V opačnom prípade, uvažujme stenu $\gamma \neq f_2$ incidentnú s hranou x_2x_3. Ak γ je $\geq$5-stena, tak $\bar{c}(x_3) \geq -1+\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{2}{5} = \frac{7}{10}$, $\bar{c}(x_2) \geq -1+\frac{1}{2}+\frac{4}{5} = \frac{3}{10}$, $n_4(x_3) \leq 3$, $n_4(x_4) \leq 4$ a $c^*(x) \geq -2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{9}{10}}{4}+\frac{\frac{7}{10}}{3}+\frac{\frac{3}{10}}{4} = \frac{1}{10} > 0$. Teraz nech γ je 4-stena. Potom $n_4(x_3)3$. Ak $n_4(x_2) \leq 2$, tak $c^*(x) \geq -2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{9}{10}}{4}+\frac{\frac{2}{5}}{3}+\frac{\frac{1}{6}}{2} = \frac{1}{120} > 0$. Ak v ďalšom $n_4(x_2) = 3$, tak x_2 je susedný s dvoma nepravými vrcholmi ležiacimi na stene $\omega \neq f_1$, ktorá je incidentná s hranou $\hat{x}_1x_2$. Z toho dostávame, že ω je $\geq$4-stena. Potom $\bar{c}(x_2) \geq -1+2\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ a $c^*(x) \geq -2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{9}{10}}{4}+\frac{\frac{2}{5}}{3}+\frac{\frac{2}{3}}{3} = \frac{53}{360} > 0$.

2.3.2 Nech x_4 je $\geq$6-vrchol a x_2, x_3 sú 5-vrcholy. Navyše môžeme predpokladať, že f_1, f_3 sú 4-steny (inak $c^*(x) \geq -2+1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5} = \frac{1}{15} > 0$). Taktiež môžeme ďalej predpokladať, že vrchol $\hat{x}_3$ je nepravý (inak $\hat{x}_3$ je veľký, keďže $\hat{x}_3x_4x_2x_3$ je 4-kružnica, teda f_3 je incidentná s dvomi $\geq$6-vrcholmi).

2.3.2.1. Ak obidva vrcholy x_2, x_3 sú incidentné s aspoň tromi $\geq$4-stenami, potom $\bar{c}(x_2) \geq -1+2\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, $n_4(x_2) \leq 4$. To isté platí pre x_3 a dostávame $c^*(x) \geq -2+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+2\cdot\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{1}{15} > 0$.

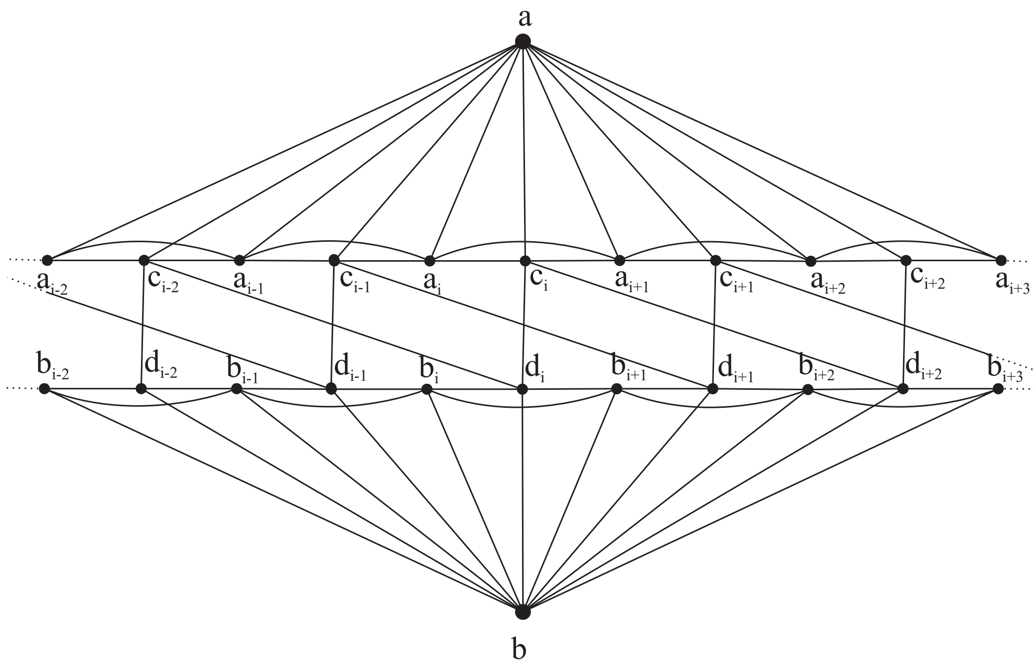
2.3.2.2. Nech x_3 je teraz incidentný s práve dvomi $\geq$4-stenami. Potom existuje 3-stena $[x_3\hat{x}_3w]$. Ak $x_4x_2x_3w$ je 4-kružnica v G, w je veľký a zrejme $n_4(x_3) = 3$. Ak teraz hrana x_3w je incidentná s $\geq$4-stenou, tak $\bar{c}(x_3) \geq -1+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{5} = \frac{11}{15}$. Vzhľadom na to, že $n_4(x_2) \leq 4$ a $\bar{c}(x_2) \geq -1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ získavame $c^*(x) \geq -2+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{11}{15}}{3}+\frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{7}{360} > 0$. Teda predpokladajme, že x_3w je incidentná iba s 3-stenami $[x_3\hat{x}_3w]$, $[x_3wy]$. Nech je y nepravým vrcholom. Uvažujme lokálnu štruktúru susedných vrcholov vrchola x_2. Nech $\alpha, \beta, \gamma, f_1, f_2$ sú steny incidentné s x_2 označené v kladnej orientácii. Ak α je $\geq$5-stena, tak $\bar{c}(x_3) \geq -1+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{2}{5} = \frac{13}{15}$, $\bar{c}(x_2) \geq -1+\frac{2}{3}+\frac{4}{5} = \frac{7}{15}$, $n_4(x_3) = 3$, $n_4(x_2) \leq 4$ a $c^*(x) \geq -2+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{13}{15}}{3}+\frac{\frac{7}{15}}{4} = \frac{5}{36} > 0$. Nech teda $\alpha = [x_2x_3yz]$ je 4-stena. Potom z je pravý vrchol, z čoho vyplýva $n_4(x_2) \leq 3$. Ak x_2 je incidentný s aspoň tromi $\geq$4-stenami, tak $\bar{c}(x_2) \geq -1+2\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ a $c^*(x) \geq -2+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{17}{30}}{3}+\frac{\frac{2}{3}}{3} = \frac{13}{90} > 0$. Teda môžeme predpokladať, že x_2 je incidentný s presne dvomi 4-stenami f_1 a α. Potom obidve hrany $\hat{x}_1x_2$ a x_2z sú incidentné s 3-stenami, to znamená, že $\hat{x}_1$ je pravý vrchol a $n_4(x_2) \leq 2$. V tomto prípade získame $c^*(x) \geq -2+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{17}{30}}{3}+\frac{\frac{1}{6}}{2} = \frac{1}{180} > 0$.

2.3.3 Nech x_3 je $\geq$6-vrchol a x_2, x_4 sú 5-vrcholy. Opäť môžeme predpokladať, že obidve steny f_1, f_3 sú 4-steny (inak $c^*(x) \geq -2+1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5} = \frac{1}{15} > 0$) a $\hat{x}_3$ je nepravý vrchol (inak $\hat{x}_3$ je veľký keďže $\hat{x}_3x_4x_2x_3$ je 4-kružnica, a preto je f_3 incidentná s dvomi $\geq$6-vrcholmi). Ak x_4 je incidentný s aspoň tromi $\geq$4-stenami, tak $\bar{c}(x_4) \geq -1+2\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5} = \frac{16}{15}$, $n_4(x_4) \leq 4$ a $c^*(x) \geq -2+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{16}{15}}{4}+\frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{24} > 0$. Takže predpokladajme v ďalšom, že x_4 je incidentný s presne dvomi $\geq$4-stenami. Potom tam existuje 3-stena $[\hat{x}_3x_4w]$. Keďže $x_4x_2x_3w$ je 4-kružnica, w musí byť veľký vrchol. Z toho $\bar{c}(x_4) \geq -1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+2\cdot\frac{2}{5} = \frac{29}{30}$, $n_4(x_4) \leq 3$ a $c^*(x) \geq -2+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{\frac{29}{30}}{3}+\frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{7}{72} > 0$.

Týmto sme získali také prerozdelenie náboja, že $\sum\limits_{x\in F^\times\cup V^\times} c^*(x) \geq 0$, čo je spor.

$\square$

Podmienka obvodu 4 je v uvedenej vete podstatná, lebo v triede 1-planárnych grafov minimálneho stupňa 5 kružnica C_4 nie je ľahká, čo ukazuje nasledujúca konštrukcia zobrazená aj na obrázku 17.



Obrázok 17: C_4 je ťažká v triede 1-planárnych grafov minimálneho stupňa 5

Pre párne $m \geq 4$ vezmime dve m-kružnice $[a_1c_1a_2c_2\ldots a_{\frac{m}{2}}c_{\frac{m}{2}}]$, $[b_1d_1b_2d_2\ldots b_{\frac{m}{2}}d_{\frac{m}{2}}]$ a dva nové vrcholy a, b. Pridajme nové hrany aa_k, ac_k, bb_k, bd_k, a_ka_{k+1}, b_kb_{k+1}, c_kd_k, c_kd_{k+2} pre $k = 1, \ldots, m$ (indexy modulo m). Vzniknutý graf je 1-planárny minimálneho stupňa 5 a každý jeho podgraf izomorfný s C_4 obsahuje m-vrchol.

Veta 4.3. *Každý* 1*-planárny graf minimálneho stupňa* 5 *a minimálneho obvodu* 4 *obsahuje takú* 4*-hviezdu* S_4*, že každý jej vrchol je stupňa* ≤ 11.

Dôkaz. Budeme dokazovať pomocou metódy prerozdeľovania náboja so schémou 2. Poznamenajme, že $D(G)^\times$ má vrcholy minimálneho stupňa 4 (nepravé vrcholy), ktoré sú susedné s $\geq$5-vrcholmi. Veľké vrcholy budú v tomto prípade $\geq$12-vrcholy. V ďalšom prerozdelíme prvotné náboje vrcholov a stien tak, aby konečný súčet nábojov bol rovnaký. Budeme postupovať podľa nasledujúcich pravidiel:

(1.) Každá $\geq$4-stena f odovzdá $\frac{c(f)}{m_{4,5}(f)}$ každému 4- alebo 5-vrcholu incidentnému so stenou f ($m_{4,5}(f)$ je počet 4- alebo 5- vrcholov incidentných so stenou f). Ak $m_{4,5}(f) = 0$, tak sa žiaden náboj neposiela.

(2.) Každý veľký vrchol x odovzdá $\frac{1}{2}$ každému 5-vrcholu susednému s vrcholom x v pôvodnom grafe G.

Nech $\bar{c}(v)$ je náboj vrchola $v \in V^{\times}$ po uskutočnení pravidiel (1.) a (2.)

(3.) Každý 5-vrchol v s $\bar{c}(v) > 0$ odovzdá $\frac{\bar{c}(v)}{n_4(v)}$ každému susednému 4-vrcholu ($n_4(v)$ je počet susedných 4-vrcholov s vrcholom v). Ak $n_4(v) = 0$, tak sa žiaden náboj neposiela.

Nech f je r-stena. Ak $r = 3$, tak $c^*(f) = c(f) = 0$. Pre $r \geq 4$ budú náboje po prerozdelení buď rovné 0 alebo kladné. Pre vrcholy stupňa 6 až 11 je prvotný náboj nezáporný. Na tieto vrcholy sa žiadne pravidlo nevzťahuje, ich náboj zostáva nezáporný. Z formulácie pravidla (2.) vyplýva, že každý veľký vrchol posiela náboj $\frac{1}{2}$ každému susednému 5-vrcholu v G. Veľký d-vrchol x má najviac d susedných 5-vrcholov v G. Z toho plynie $c^*(x) \geq d - 6 - \frac{1}{2} \cdot d = \frac{d}{2} - 6 \geq 0$ pre $d \geq 12$. V ďalšom budeme uvažovať vrcholy stupňa 5 a 4.

1. Nech x je 5-vrchol. Poznamenajme, že x susedí v G s aspoň dvomi veľkými vrcholmi (inak 4 jeho susedia s ním vytvárajú ľahkú 4-hviezdu, čo je spor), a teda dostáva od nich príspevok aspoň $2 \cdot \frac{1}{2}$. Ďalší náboj bude dostávať od incidentných $\geq$4-stien. Každá $\geq$4-stena odovzdá náboj aspoň $\frac{2 \cdot 4 - 6}{4} = \frac{1}{2}$. Rozoberieme teraz všetky možné okolia 5-vrcholu x, čo bude dôležité v analýze 4-vrcholov. Dielom budeme nazývať náboj $d(x) = \frac{\bar{c}(x)}{n_4(x)}$, ktorý prebitý 5-vrchol x odovzdá susediacemu 4-vrcholu podľa pravidla (3.).

   1.1. Ak je x incidentný so samými $\geq$4-stenami, jeho náboj bude $\bar{c}(x) \geq -1 + 5 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ a diel bude $d(x) \geq \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}$.

   1.2. Ak je x incidentný s práve jednou 3-stenou, jeho náboj bude $\bar{c}(x) \geq -1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$ a diel bude $d(x) \geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

   1.3. Ak je x incidentný s dvoma nesusednými 3-stenami, jeho náboj bude $\bar{c}(x) \geq -1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ a diel bude $d(x) \geq \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$.

   1.4. Ak je x incidentný s dvoma susednými 3-stenami, jeho náboj bude $\bar{c}(x) \geq -1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ a diel bude $d(x) \geq \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{8}$.

   1.5. Ak je x incidentný s troma 3-stenami, jeho náboj bude $\bar{c}(x) \geq -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ a diel bude $d(x) \geq \frac{1}{3}$.

   Zrejme 5-vrchol bude mať vždy nezáporný náboj po prerozdelení; dokonca v každom prípade posiela 5-vrchol pri pravidle (3.) náboj aspoň $\frac{1}{3}$.

2. Nech x je 4-vrchol. Je teda nepravý a inciduje s najviac dvoma 3-stenami a ak práve s dvoma, tak sú nesusedné (inak v okolí x existuje C_3, čo je spor).

   2.1. Nech x inciduje iba s $\geq$4-stenami. Potom podľa pravidla (1.) platí $\bar{c}(x) \geq -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$.

   2.2. Nech x je incidentný s aspoň jednou 3-stenou, označme ju f. Ďalšie incidentné vrcholy s f nech sú y a z. Nech steny susedné s f a incidentné s vrcholmi x, y (resp. x, z) sú označené f_1 (resp. f_2). Pripomeňme, že f_1 a f_2 musia byť $\geq$4-steny. Zamerajme sa na stenu f_1. Nech vrchol ležiaci na f_1, susedný s x a rôzny od y je označený ako y'. Ak sú obidva vrcholy y a y' stupňa ≥ 6, tak f_1 posiela vrcholu x podľa pravidla (1.) aspoň $\frac{2\cdot 4-6}{2} = 1$. BUNV, nech y je 5-vrchol a nech y' je $\geq$6-vrchol. Potom f_1 posiela podľa pravidla (1.) náboj aspoň $\frac{2\cdot 4-6}{3} = \frac{2}{3}$ a 5-vrchol y podľa pravidla (3.) posiela aspoň $\frac{1}{3}$ vrcholu x. Spoločne dostáva x náboj aspoň 1. Nakoniec ak sú oba vrcholy y a y' práve 5-vrcholy, tak f_1 posiela vrcholu x aspoň $\frac{2\cdot 4-6}{4} = \frac{1}{2}$ a y, y' posielajú aspoň $2 \cdot \frac{1}{3}$. Príspevok od steny f_1 a vrcholov y, y' je vždy aspoň 1. To isté platí pre stenu f_2. Z toho dostávame $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot 1 = 0$.

Zostrojili sme prerozdelenie náboja, pri ktorom

$$\sum_{x \in F^\times \cup V^\times} c^*(x) \geq 0,$$

čo je spor. □

Podmienka minimálneho obvodu 4 je v tomto tvrdení podstatná, pretože podľa lemy 5.2 je 4-hviezda S_4 ťažká v triede 1-planárnych grafov minimálneho stupňa 5.

Veta 4.4. *Každý* 1*-planárny graf minimálneho stupňa* 5 *a minimálneho obvodu* 4 *obsahuje takú* 3*-hviezdu* S_3*, že každý jej vrchol je stupňa* ≤ 8.

Dôkaz. Rovnakým spôsobom ako v predchádzajúcej vete 4.3; zmena nastáva len v pravidle (2.), keď veľký vrchol x stupňa aspoň 9 posiela $\frac{1}{3}$ každému susednému 5-vrcholu v pôvodnom grafe. Vzhľadom na to bude mať veľký vrchol x stupňa d po vykonaní všetkých pravidiel náboj $c^*(x) \geq d - 6 - \frac{1}{3} \cdot d \geq 0$ pre $d \geq 9$.

Každý 5-vrchol je susedný v G s aspoň tromi veľkými vrcholmi. Pri analýze 5-vrcholov nastane oproti predošlému dôkazu zmena jedine v príspevku od veľkých vrcholov. Bude to $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ (rovnako ako v predchádzajúcom dôkaze $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$). Diel $\frac{1}{3}$ v pravidle (3.) sa zachová. Z toho vyplýva, že analýza 4-vrcholov prebehne rovnako. □

4.3 Trieda 1-planárnych grafov minimálneho stupňa 7

Hovoríme, že hrana uv v grafe G je typu $(\deg_G(u),\deg_G(v))$.

Veta 4.5. *Každý* 1*-planárny graf minimálneho stupňa* 7 *obsahuje hranu typu* $(7, 7)$.

Dôkaz. Na dôkaz použijeme metódu prerozdeľovania náboja so schémou 3. Budeme predpokladať, že existuje 1-planárny graf $G = (V, E)$ minimálneho stupňa 7 taký, že každá jeho hrana je typu $(\geq 8, \geq 8)$ alebo $(7, \geq 8)$. Nech $D(G)^\times$ je rovinným asociovaným grafom G. Pravidlá pre prerozdeľovanie náboja budú nasledovné:

(1.) Každý ≥ 7-vrchol $v \in V^\times$ prepošle $\frac{c(v)}{k(v)}$ každej incidentnej 3-stene ($k(v)$ je počet incidentných 3-stien s vrcholom v). Ak $k(v) = 0$, tak sa žiaden náboj neposiela.

(2.) Každá 3-stena prebitá po aplikovaní pravidla (1.) prepošle incidentnému 7-vrcholu $\frac{3}{7}$.

Dočasný náboj vrchola $v \in V^\times$ po aplikovaní pravidiel (1.) a (2.) označíme $\bar{c}(v)$.

(3.) Každý 7-vrchol v s $\bar{c}(v) > 0$ prepošle incidentným nepravým 3-stenám rovnomerne $\frac{\bar{c}(v)}{k'(v)}$ ($k'(v)$ je počet nepravých 3-stien incidentných s vrcholom v). Ak $k'(v) = 0$, tak sa žiaden náboj neposiela.

V grafe $D(G)^\times$ majú všetky vrcholy a všetky ≥ 4-steny po prvotnom rozdelení nezáporný náboj. Jedine 3-steny majú náboj -1. V ďalšom budeme analyzovať 3-steny grafu $D(G)^\times$:

1. Všetky vrcholy incidentné s 3-stenou f sú pravé ≥ 8-vrcholy. Podľa pravidla (1.) pre 3-stenu f potom platí $c^*(f) \geq -1 + 3 \cdot \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2} > 0$.

2. Vrcholy incidentné s 3-stenou f sú pravé, pričom práve jeden je 7-vrchol. Ostatné dva musia byť teda ≥ 8-vrcholy. Podľa pravidla (1.) pre 3-stenu f potom platí $c^*(f) \geq -1 + 2 \cdot \frac{8-4}{8} + \frac{7-4}{7} = \frac{3}{7}$. Následne f podľa pravidla (2.) odovzdá incidentnému 7-vrcholu náboj $\frac{3}{7}$, bude teda $c^*(f) \geq \frac{3}{7} - \frac{3}{7} = 0$

3. Práve jeden z vrcholov incidentných s 3-stenou f je nepravý vrchol. Označme ho x.

   3.1. Nech sú ďalšie dva vrcholy incidentné so stenou f ≥ 8-vrcholy. Potom $c^*(f) \geq -1 + 2 \cdot \frac{8-4}{8} = 0$.

   3.2. Nech s f sú ďalej incidentné jeden 7-vrchol a ≥ 8-vrchol.

3.2.1. Ak je nejaká stena incidentná so 7-vrcholom $\geq$4-stena, tak platí $c^*(f) \geq -1 + \frac{7-4}{7-1} + \frac{8-4}{8} = 0$

3.2.2. Ak je nejaká stena incidentná s $\geq$8-vrcholom $\geq$4-stena, tak platí $c^*(f) \geq -1 + \frac{7-4}{7} + \frac{8-4}{8-1} = 0$

3.2.3. Nech sú teraz všetky steny incidentné so 7-vrcholom a s $\geq$8-vrcholom 3-stenami. Určite potom musí 7-vrchol incidovať s aspoň jednou pravou 3-stenou (nepravých 3-stien je nanajvýš 6). Tá je prebitá $\geq \frac{3}{7}$, podľa pravidla (2.) prepošle tento náboj späť 7-vrcholu. Podľa pravidla (3.) bude príspevok od 7-vrchola nepravým 3-stenám po $\frac{\frac{3}{7}}{6} = \frac{1}{14}$. Pre f potom platí $c^*(f) \geq -1 + \frac{7-4}{7} + \frac{8-4}{8} + \frac{1}{14} = 0$

Týmto sme získali také prerozdelenie náboja, že $\sum_{x \in F^\times \cup V^\times} c^*(x) \geq 0$, čo je spor. □

Veta 4.6. *Každý* 1*-planárny graf minimálneho stupňa* 7 *obsahuje taký podgraf* K_4*, ktorého každý vrchol je stupňa* ≤ 13.

Dôkaz. Budeme dokazovať metódou prerozdeľovania náboja pomocou schémy 2. Vrchol stupňa ≥ 14 budeme nazývať veľký, vrchol stupňa 7 až 13 stredný. V ďalšom prerozdelíme prvotný náboj podľa nasledujúcich pravidiel:

(1.) Každá $\geq$4-stena $f \in F^\times$ pošle rovnomerne $\frac{c(f)}{m_4(f)}$ každému incidentnému 4-vrcholu ($m_4(f)$ je počet incidentných 4-vrcholov so stenou f). Ak $m_4(f) = 0$, tak sa žiaden náboj neposiela.

(2.) Každý stredný vrchol $v \in V^\times$ prepošle $\frac{1}{7}$ každému susednému 4-vrcholu.

(3.) Nech $[xyz]$ je 3-stena $D(G)^\times$, nech x je 4-vrchol a y je stredný vrchol. Potom y pošle dodatočne $\frac{1}{14}$ vrcholu x.

(4.) Každý veľký vrchol $v \in V^\times$ prepošle $\frac{4}{7}$ každému susednému 4-vrcholu.

(5.) Nech $[xyz]$ je 3-stena $D(G)^\times$, nech x je 4-vrchol a y je veľký vrchol. Potom y pošle dodatočne $\frac{2}{7}$ vrcholu x.

Je zrejmé, že prvotný náboj je pre každú stenu a pre každý pravý vrchol nezáporný, jedine pre nepravé 4-vrcholy je prvotný náboj záporný.

1. Nech x je 4-vrchol grafu $D(G)^\times$. Poznamenajme, že všetky jeho susedné vrcholy sú $\geq$7-vrcholy. Ak x je incidentný s aspoň dvomi $\geq$4-stenami tak podľa pravidla (1.) bude $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 - 6}{2} = -2 + 2 \cdot 1 = 0$. Ak x je incidentný s práve jednou $\geq$4-stenou, tak po aplikovaní pravidiel (1.), (2.) a (3.) dostaneme

$c^*(x) \geq -2 + \frac{2\cdot 4-6}{2} + 4 \cdot \frac{1}{7} + 6 \cdot \frac{1}{14} = 0$ (ak by bol niektorý sused vrchola x veľký, posielal by namiesto $\frac{1}{7}$ až $\frac{4}{7}$ a namiesto $\frac{1}{14}$ až $\frac{2}{7}$). Nakoniec, ak x je incidentný so samými 3-stenami, tak aspoň jeden zo susedov vrchola x je veľký. Použitím pravidiel (2.), (3.), (4.) a (5.) dostávame $c^*(x) \geq -2 + 3 \cdot \frac{1}{7} + 6 \cdot \frac{1}{14} + \frac{4}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} = 0$.

2. Nech x je stredný d-vrchol. Takýto vrchol x je používaný v pravidlách (2.) a (3.). Keďže pravidlo (3.) iba prerozdeľuje nepoužitý náboj z pravidla (2.), tak platí: $c^*(x) \geq d - 6 - \frac{1}{7} \cdot d \geq 0$ pre $d \geq 7$.

3. Nech x je veľký d-vrchol. Podľa podobnej argumentácie ako v predchádzajúcom prípade platí $c^*(x) \geq d - 6 - \frac{4}{7} \cdot d \geq 0$ pre $d \geq 14$.

Týmto sme získali také prerozdelenie náboja, že $\sum_{x \in F^\times \cup V^\times} c^*(x) \geq 0$, čo je spor. □

Veta 4.7. *Každý 1-planárny graf minimálneho stupňa 7 obsahuje taký podgraf C_5, ktorého každý vrchol je stupňa ≤ 9.*

Dôkaz. Budeme dokazovať metódou prerozdeľovania náboja pomocou schémy 2. Pre potreby tohto dôkazu budeme nazývať $\geq$10-vrchol veľký. Taktiež budeme používať špeciálne označenia. Pre danú d-stenu f budeme označovať incidentné vrcholy steny v $D(G)^\times$ ako $x_1, x_2, \ldots, x_d$ v zápornom smere. f_i, $i = 1, \ldots, d$ označíme stenu grafu $D(G)^\times$, ktorá je susedná s f a incidentná s vrcholmi x_i, x_{i+1}(index modulo d) na hranici steny. Ak f_i je 3-stena $[x_i x_{i+1} z]$, tak z budeme označovať ako x'_i. Stenu susednú s 3-stenou f_i a incidentnú s vrcholmi x_i, x'_i (resp. x'_i, x_{i+1}) označíme g_i^p (resp. g_i^l). Ak g_i^p (resp. g_i^l) bude 3-stena $[x_i x'_i a]$ (resp. $[x'_i x_{i+1} b]$), tak vrchol a (resp. b) označíme ako x_i^p (resp. x_i^l).

Pravidlá pre prerozdelenie prvotného náboja sú nasledovné:

(1.) Každá $\geq$4-stena prepošle každému incidentnému nepravému vrcholu náboj $\frac{1}{2}$.

(2.) Každá $\geq$4-stena f prepošle 4-vrcholu x'_i náboj $\frac{c(f) - \frac{1}{2} m_4(f)}{t(f)}$, ak x_i a x_{i+1} boli pravé vrcholy ($m_4(f)$ je počet 4-vrcholov incidentných so stenou f, $t(f)$ je počet trojuholníkových stien susedných so stenou f). Ak $t(f) = 0$, tak sa žiaden náboj neposiela.

(3.) Každá $\geq$4-stena f prepošle 4-vrcholu x_i náboj $\frac{c(f) - \frac{1}{2} m_4(f)}{2.t(f)}$, ak x'_i a x_{i+1} boli pravé vrcholy.

(4.) Každá $\geq$4-stena f prepošle 4-vrcholu x_i^p (resp. x_i^l) náboj $\frac{c(f) - \frac{1}{2} m_4(f)}{2.t(f)}$, ak x'_i a x_i (resp. x'_i a x_{i+1}) boli pravé vrcholy.

(5.) Každý pravý vrchol pošle $\frac{1}{7}$ susednému nepravému vrcholu.

(6.) Každý pravý vrchol ležiaci na 3-stene s práve jedným nepravým vrcholom pošle tomuto 4-vrcholu náboj $\frac{1}{14}$

(7.) Nech $[x_1x_2x_3]$ je 3-stena, vrchol x_1 je veľký a nech f_2 je 3-stena s nepravým vrcholom x_2'. Veľký vrchol x_1 pošle $\frac{3}{14}$ vrcholu x_2'.

(8.) Nech $[x_1x_2x_3]$ je 3-stena, vrchol x_1 je veľký, jeden z vrcholov x_2, x_3 je nepravý a nech f_2 je 3-stena. Veľký vrchol x_1 pošle $\frac{3}{28}$ nepravému vrcholu na stene f_2.

(9.) Nech $[x_1x_2x_3]$ je 3-stena, vrchol x_1 je veľký, vrchol x_2 (resp. x_3) je pravý a nech f_2 je 3-stena s pravým vrcholom x_2'. Veľký vrchol x_1 pošle $\frac{3}{28}$ nepravému vrcholu x_2^p (resp. x_2^l).

Pomocné tvrdenie: Podľa pravidla (2.) sa 4-vrcholu odosiela aspoň $\frac{1}{4}$.

Dôkaz. Majme d-stenu f, teda $c(f) = 2 \cdot d - 6$. So stenou f môže byť incidentných najviac $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ 4-vrcholov, teda $m_4(f) \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. d-stena f môže mať najviac d susedných 3-stien; $t(f) \leq d$. Podľa pravidla (2.) sa 4-vrcholu môže odoslať aspoň $\frac{c(f) - \frac{1}{2} m_4(f)}{t(f)} \geq \frac{2 \cdot d - 6 - \frac{1}{2} \lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{d} = 2 - \frac{6}{d} - \frac{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{2d} \geq 2 - \frac{6}{d} - \frac{\frac{d}{2}}{2d} = 2 - \frac{6}{d} - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} - \frac{6}{d} \geq \frac{1}{4}$ pre $d \geq 4$. □

Každý pravý vrchol má prvotný náboj aspoň 1, každá stena má nezáporný náboj. Stačí analyzovať vrcholy stupňa 4. Nech x je teda nepravý vrchol.

1. Nech x je incidentný iba s ≥4-stenami. Každá potom odovzdá náboj $\frac{1}{2}$ (pravidlo (1.)). Pre nový náboj platí: $c^*(x) \geq -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$.

2. Nech x je incidentný s práve jednou 3-stenou a ďalšími ≥4-stenami. 4-steny odovzdajú po náboji $\frac{1}{2}$. Susedné vrcholy vrchola x odovzdajú $\frac{1}{7}$ (pravidlo (5.)). Pre nový náboj platí: $c^*(x) \geq -2 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{14} > 0$.

3. Nech x je incidentný s práve dvomi 3-stenami (susednými alebo nie) a ďalšími ≥4-stenami. 4-steny odovzdajú po náboji $\frac{1}{2}$. Susedné vrcholy vrchola x odovzdajú po $\frac{1}{7}$ a podľa pravidla (6.) sa odovzdá ešte $4.\frac{1}{14}$. Podľa pravidla (3.) sa odovzdá aspoň $2.\frac{1}{8}$. Pre nový náboj platí: $c^*(x) \geq -2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{7} + 4 \cdot \frac{1}{14} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{28} > 0$.

4. Nech x je incidentný s práve jednou ≥4-stenou (označme f) a ďalšími 3-stenami. Susedné vrcholy x označme ako x_1, x_2, x_3, x_4 v zápornom smere, pričom x_1 a x_4 sú incidentné so stenou f. 3-steny incidentné s vrcholom x a vrcholmi x_1,x_2 (x_2,x_3 resp. x_3,x_1) označíme ako f_1 (f_2 resp. f_3). 4-stena f

odovzdá náboj aspoň $\frac{1}{2}$. Susedné vrcholy vrchola x odovzdajú po $\frac{1}{7}$ a podľa pravidla (6.) odovzdajú ešte $6\cdot\frac{1}{14}$. Podľa pravidla (3.) odovzdá stena f vrcholu x $2\cdot\frac{1}{8}$. Pre nový náboj platí: $c^*(x) \geq -2+\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{7}+6\cdot\frac{1}{14}+2\cdot\frac{1}{8} = -\frac{1}{4}$. V ďalšom ukážeme, že vždy sa získa náboj aspoň $\frac{1}{4}$, čím sa dosiahne nezáporný náboj vrchola x.

4.1. Ak aspoň jedna zo stien susedných s niektorou z f_1, f_2, f_3 rôzna od f je $\geq$4-stena, tak podľa pravidla (2.) bude pridaný náboj aspoň $\frac{1}{4}$.

4.2. Ak sú všetky steny susedné so stenami f_1, f_2, f_3 rôzne od f (označme f_1', f_2', f_3') práve 3-steny, tak môžu nastať iba tieto prípady: (Doteraz neoznačené vrcholy stien f_1', f_2' a f_3' označíme postupne ako x_1', x_2' a x_3'.)

4.2.1. Ak sú obidva x_1' a x_3' pravé, tak musia byť veľké. Podľa pravidla (7.) posielajú spolu $2\cdot\frac{3}{14} = \frac{3}{7} > \frac{1}{4}$.

4.2.2. Ak je x_1' pravý a x_3' nepravý (symetricky pre x_3' pravý), tak x_1' musí byť veľký a bude vrcholu x posielať náboj $\frac{3}{14}$. Doteraz neoznačenú stenu incidentnú s x_3' a x_3 označíme g_3^p a stenu incidentnú s x_3' a x_4 ako g_3^l.

4.2.2.1. Ak je niektorá zo stien g_3^l a g_3^p $\geq$4-stena, tak pomocou pravidla (4.) vrcholu x odošle aspoň $\frac{2\cdot 4-6-\frac{1}{2}\cdot 2}{2\cdot 4} = \frac{1}{8}$. Spolu teda $\frac{3}{14}+\frac{1}{8} = \frac{19}{56} > \frac{1}{4}$

4.2.2.2. Ak sú obidve g_3^l a g_3^p 3-steny, tak doteraz neoznačené vrcholy g_3^l a g_3^p musia byť veľké. Aplikáciou pravidla (9.) odošlú vrcholu x po náboji $\frac{3}{28}$. Spolu $\frac{3}{14}+2\cdot\frac{3}{28} = \frac{3}{7} > \frac{1}{4}$

4.2.3. Ak žiadny z vrcholov x_1' a x_3' nie je pravý, tak analogicky analýze v prípadoch 4.2.2.1. a 4.2.2.2. je zrejmé, že aj zo strany x_1' aj zo strany x_3' sa odošle $\min\{\frac{1}{8}, 2\cdot\frac{3}{28}\} = \min\{\frac{1}{8}, \frac{3}{14}\} = \frac{1}{8}$. A teda sa vrcholu odošle aspoň náboj $2\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

5. Nech je x incidentný so samými 3-stenami. Po aplikovaní pravidiel (5.) a (6.) sa nadobudne dočasný náboj $c^*(x) \geq -2+4\cdot\frac{1}{7}+8\cdot\frac{1}{14} = -\frac{6}{7}$. Preznačme vrchol x na x_1. Vyberme niektorú z incidentných 3-stien a označme ju f. Ostatné vrcholy steny f budú zrejme x_2 a x_3. Zamerajme sa teraz na stenu f_2.

5.1. Ak je stena f_2 $\geq$4-stena, tak podľa pravidla (2.) posiela vrcholu x_1 príspevok aspoň $\frac{1}{4}$.

5.2. Nech je teda f_2 3-stena.

5.2.1. Ak x_2' je pravý vrchol, nutne musí byť veľký. Podľa pravidla (7.) posiela vrcholu x_1 náboj $\frac{3}{14}$.

5.2.2. Nech x_2' je nepravý vrchol. Zameriame sa na steny g_2^p a g_2^l.

5.2.2.1. Ak sú obidve steny g_2^p a g_2^l $\geq$4-steny, tak podľa pravidla (4.) dostane x_1 príspevok $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

5.2.2.2. Ak je niektorá zo stien g_2^p a g_2^l 3-stena, tak príslušný vrchol x_2^p alebo x_2^l musí byť veľký. Podľa pravidla (9.) odovzdá náboj $\frac{3}{28}$ a podľa pravidla (4.) sa este prepošle $\frac{1}{8}$, dokopy x_1 dostane $\frac{3}{28} + \frac{1}{8} = \frac{13}{56}$.

5.2.2.3. Ak sú obidve steny g_2^p a g_2^l 3-steny, tak vrcholy x_2^p a x_2^l musia byť veľké. Podľa pravidla (9.) odovzdajú vrcholu x_1 náboj $2 \cdot \frac{3}{28} = \frac{3}{14}$.

Vrchol $x_1 = x$ podľa predchádzajúcej analýzy dostane náboj o veľkosti aspoň $\min\{\frac{3}{14}, \frac{1}{4}, \frac{13}{56}\} = \frac{3}{14}$ z každej strany. Teda celkový nový náboj vrchola x bude $c^*(x) \geq -2 + 4 \cdot \frac{1}{7} + 8 \cdot \frac{1}{14} + 4 \cdot \frac{3}{14} = 0$

Ak f je k-stena ($k \geq 4$), tak zrejme po vykonaní pravidla (1.) platí: $c^*(f) \geq 2 \cdot k - 6 - \frac{1}{2} \cdot m_4(f) \geq 2 \cdot k - 6 - \frac{1}{2} \cdot \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \geq 2 \cdot k - 6 - \frac{k}{4} \geq 0 \quad$ pre $k \geq 4$. Ďalšie pravidlá týkajúce sa $\geq$4-stien sa uplatňujú iba, ak je nejaký zvyšný náboj po pravidle (1.) prípadne po pravidle (2.) a rozdeľuje sa rovnomerne.

Ak y je stredný l-vrchol, tak opäť po aplikovaní pravidla (5.) platí $c^*(y) \geq l - 6 - \frac{1}{7} \cdot l \geq 0$ pre $l \geq 7$. Pravidlo (6.) vzťahujúce sa na stredné vrcholy sa uplatní iba, ak sa neuplatnilo celkom pravidlo (5.) a prerozdeľuje sa rovnomerne.

Ak z je veľký k-vrchol, tak po aplikovaní pravidiel (5.) a (7.) platí $c^*(z) \geq k - 6 - \frac{1}{7} \cdot k - \frac{3}{14} \cdot k \geq 0$ pre $k \geq 10$. Ostatné pravidlá sa uplatňujú iba, ak zostal nejaký kladný náboj a prerozdeľuje sa rovnomerne.

Týmto sme získali také prerozdelenie náboja, že $\sum_{x \in F^\times \cup V^\times} c^*(x) \geq 0$, čo je spor.

$\square$

Nech $K_{2,3}^\star$ označuje $K_{2,3}$ s pridanou hranou medzi vrcholmi prvej (t.j. menšej) bipartície.

Veta 4.8. *Každý* 1*-planárny graf minimálneho stupňa* 7 *obsahuje taký podgraf* $K_{2,3}^\star$*, ktorého každý vrchol je stupňa* ≤ 13.

Dôkaz. Budeme dokazovať metódou prerozdeľovania náboja použitím schémy 3. Pre potreby dôkazu budeme nazývať vrchol stupňa 7 až 13 stredný a vrchol stupňa ≥ 14 veľký. Pravidlá pre prerozdeľovanie náboja:

(1.) Každý stredný vrchol $v \in V^\times$ prepošle $\frac{3}{7}$ každej incidentnej 3-stene.

(2.) Nech $[xyz]$ je 3-stena $D(G)^\times$. Nech f je $\geq$4-stena incidentná s hranou xy. Potom pravý vrchol $v \in V^\times$ susedný s x alebo y, incidentný so stenou f prepošle $\frac{3}{14}$ stene $[xyz]$.

(3.) Každý veľký vrchol $v \in V^\times$ prepošle $\frac{4}{7}$ každej incidentnej 3-stene.

(4.) Nech $[xyz]$ je 3-stena, nech $[yzv]$ je susedná 3-stena pričom v je veľký vrchol. Potom vrchol $v \in V^\times$ prepošle $\frac{1}{7}$ stene $[xyz]$.

(5.) Každá 3-stena $f \in F^\times$ prebitá po pravidlách (1.)-(4.) prepošle rovnomerne každej susednej nedobitej 3-stene.

(6.) Každá $\geq$5-stena odovzdá náboj $\frac{1}{5}$ každej susednej 3-stene.

V grafe $D(G)^\times$ majú všetky vrcholy a všetky $\geq$4-steny po prvotnom rozdelení nezáporný náboj. Náboj 4-vrcholov a 4-stien sa vplyvom pravidiel prerozdelenia nemení, zostáva nulový. Náboj r-steny ($r \geq 5$) je ovplyvnený pravidlom (6.) no zostáva nezáporný, keďže $r - 4 - \frac{1}{5} \cdot r \geq 0$ pre $r \geq 5$.

Stredný d-vrchol pravidlom (2.) v skutočnosti iba prerozdeľuje náboj, ktorý sa mohol odovzdať v pravidle (1.), no neuplatnilo sa. Pre stredný vrchol stupňa d po aplikovaní pravidiel (1.) a (2.) platí: $d - 4 - \frac{3}{7} \cdot d \geq 0$ pre $d \geq 7$.

Ak sa na veľký vrchol stupňa d v smere konkrétnej incidentnej steny uplatňujú pravidlá (3.) a (4.), tak sa môže odovzdať najviac $\frac{4}{7} + \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$. Ak je však daná stena $\geq$4-stena, tak sa môže uplatniť pravidlo (2.) a môže sa odoslať najviac ak $2 \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{7}$. Pre veľký vrchol potom platí: $d - 4 - \frac{5}{7} \cdot d \geq 0, \quad d \geq 14$.

3-steny majú prvotný náboj -1. V ďalšom budeme analyzovať 3-steny grafu $D(G)^\times$. Existujú takéto typy 3-stien:

1. Niektorý vrchol incidentný s 3-stenou f je veľký. Ak sú ostatné dva vrcholy stredné, tak podľa pravidiel (3.) a (1.) bude nový náboj steny $c^*(f) \geq -1 + \frac{4}{7} + 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} > 0$. Ak je jeden z vrcholov steny f nepravý, tak podobne $c^*(f) \geq -1 + \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 0$.

2. Všetky vrcholy incidentné s 3-stenou f sú stredné vrcholy. Potom každý z vrcholov podľa pravidla (1.) prepošle 3-stene náboj $\frac{3}{7}$. Pre 3-stenu f potom platí $c^*(f) \geq -1 + 3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{7} > 0$.

3. Práve jeden z vrcholov incidentných s 3-stenou f je nepravý vrchol. Označme postupne vrcholy 3-steny f ako x a y pre pravé vrcholy a c pre nepravý vrchol.

Nech sú vrcholy x a y stredné (keby bol niektorý z vrcholov x alebo y veľký vrchol, tak argument podľa prípadu 1.). Od vrcholov x a y dostane stena f vždy náboj $2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$.

3.1. Označme steny incidentné s hranami xy (xc resp. yc) ako f_1 (f_2 resp. f_3). Nech niektorá z nich je $\geq$4-stena. Ak stena f_2 resp. f_3 je $\geq$4-stena, tak použitím pravidiel (1.) a (2.) bude náboj steny $c^*(f) \geq -1 + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{14} = \frac{1}{14} > 0$. Ak stena f_1 je $\geq$5-stena, tak aplikovaním pravidla (6.) dostane stena f príspevok $\frac{1}{5}$. Spolu teda $c^*(f) \geq -1 + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{5} = \frac{2}{35} > 0$. Ak je f_1 práve 4-stena, tak musí byť incidentná okrem vrcholov x a y s ďalším pravým vrcholom. Ten použitím pravidla (2.) posiela $\frac{3}{14}$ stene f. Znovu teda $c^*(f) \geq -1 + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{14} = \frac{1}{14} > 0$.

3.2. Nech teda všetky steny f_1, f_2 a f_3 sú 3-steny. Doposiaľ neoznačený vrchol na stene f_1 označme z.

3.2.1. Ak vrchol z je pravý, musí byť nutne veľký. (Alebo je veľký niektorý z vrcholov z' resp. z'' patriaci f_2 resp. f_3 (ak by z, z', z'' boli stredné, máme ľahkú $K^{\star}_{2,3}$)). Teda podľa pravidla (4.) posiela stene f náboj $\frac{1}{7}$. To znamená, že $c^*(f) \geq -1 + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{7} = 0$.

3.2.2. Nech teda vrchol z je nepravý a z', z'' sú stredné. Označme g_1 resp. g_2 stenu incidentnú s hranou xz resp. yz. Ak sú obidve $\geq$4-steny tak pomocou pravidiel (1.) a (2.) má stena f_1 náboj aspoň $-1 + 2 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{3}{14} = \frac{2}{7}$. Podľa pravidla (5.) sa tento náboj celý odošle stene f, teda $c^*(f) \geq -1 + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{1}{7} > 0$. BUNV nech teraz g_1 je 3-stena a g_2 je $\geq$4-stena. Na stene g_1 sa objaví veľký vrchol. Ten podľa pravidla (4.) posiela stene f_1 náboj $\frac{1}{7}$ a zaručí nezáporný náboj steny g_1 (prípad 1.). Stena f_1 obdrží aj príspevok $\frac{3}{14}$ od vrchola na stene g_2. Dočasný náboj f_1 teda bude $-1 + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{7} + \frac{3}{14} = \frac{3}{14}$. Tento náboj sa podľa pravidla (5.) odovzdá celý stene f. Potom platí $c^*(f) \geq -1 + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{14} = \frac{1}{14} > 0$. Nech sú teraz obidve steny g_1 a g_2 3-stenami. Potom ale na stenách g_1 a g_2 sa musia objaviť veľké vrcholy. Vďaka príspevku $\frac{4}{7}$ pri pravidle (3.) sa dosiahne nezáporný náboj stien g_1 a g_2 (prípad 1.). Ďalej veľké vrcholy aplikovaním pravidla (4.) prepošlú stene f_1 spoločne náboj $\frac{2}{7}$. Stena f_1 bude mať po aplikovaní pravidiel (1.) a (4.) náboj $c^*(f_1) \geq -1 + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$. Tento náboj sa podľa pravidla (5.) celý pošle stene f. Platí teda $c^*(f) \geq -1 + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{7} = 0$.

Týmto sme získali také prerozdelenie náboja, že $\sum_{x \in F^\times \cup V^\times} c^*(x) \geq 0$, čo je spor. $\square$

Nech $K_{2,3}^{\ddagger}$ označuje $K_{2,3}$ s pridanými dvoma hranami medzi vrcholmi druhej (t.j. väčšej) bipartície.

Veta 4.9. *Každý 1-planárny graf minimálneho stupňa 7 obsahuje taký podgraf $K_{2,3}^{\ddagger}$, ktorého každý vrchol je stupňa ≤ 11.*

Dôkaz. Budeme dokazovať metódou prerozdeľovania náboja so schémou 3. Vrchol stupňa ≥ 12 budeme nazývať veľký. Pravidlá pre prerozdeľovanie náboja budú nasledovné:

(1.) Každý $\geq$7-vrchol $v \in V^{\times}$ odovzdá $\frac{4}{9}$ každej incidentnej nepravej 3-stene a $\frac{1}{3}$ každej incidentnej pravej 3-stene.

Nech $c_1(x)$ označuje náboj prvku $x \in V^{\times} \cup F^{\times}$ po uskutočnení pravidla (1.).

(2.) Ak vrchol $v \in V^{\times}$ má $c_1(v) \geq \frac{1}{18} \cdot k'(v)$, kde $k'(v)$ je počet nepravých 3-stien incidentných s vrcholom v, tak každej incidentnej nepravej 3-stene odovzdá náboj $\frac{1}{18}$. Ak $c_1(v) < \frac{1}{18} \cdot k'(v)$ alebo $k'(v) = 0$, tak sa žiaden náboj neposiela.

Nech $c_2(x)$ označuje náboj prvku $x \in V^{\times} \cup F^{\times}$ po uskutočnení pravidiel (1.) a (2.).

(3.) Nech $[xyz]$ je 3-stena. Nech y je 7-vrchol a z je 4-vrchol. Ak vrchol $x \in V^{\times}$ nie je veľký, no má $c_2(x) > 0$, tak odovzdá každej incidentnej 3-stene typu $[xyz]$ rovnomerne. Ak $c_2(x) \geq \frac{1}{18} \cdot n''(x)$, tak odovzdá $\frac{1}{18}$ každej incidentnej 3-stene typu $[xyz]$ ($n''(v)$ je počet incidentných 3-stien $[vxy]$ s vrcholom v, kde $\deg_{D(G)^{\times}}(x) = 7$ a $\deg_{D(G)^{\times}}(y) = 4$).

(4.) Veľký vrchol posiela každému susednému 7-vrcholu $\frac{1}{3}$.

(5.) Ak 7-vrchol dostal príspevok od veľkého vrchola, tak ho prepošle rovnomerne medzi incidentné nepravé 3-steny.

V grafe $D(G)^{\times}$ majú všetky vrcholy a všetky $\geq$4-steny po prvotnom rozdelení nezáporný náboj. 3-steny majú náboj -1. V ďalšom budeme analyzovať 3-steny grafu $D(G)^{\times}$. Existujú iba dva typy 3-stien. Keďže $\frac{4}{9} > \frac{1}{3}$, tak budeme častejšie uvažovať nepravé 3-steny. Pre pravé 3-steny bude v danej štruktúre platiť tvrdenie tým skôr.

1. Všetky vrcholy incidentné s 3-stenou f sú pravé vrcholy. Potom každý z vrcholov podľa pravidla (1.) odovzdá 3-stene náboj $\frac{1}{3}$. Pre 3-stenu f potom platí $c^*(f) = c_1(f) = -1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$.

2. Nech f je 3-stena s incidentnými vrcholmi x, y a z. Nech z je nepravý vrchol.

2.1. Nech sú ostatné dva vrcholy x a y stupňa aspoň 8, potom $c_1(x) \geq 8 - 4 - 8 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$, $c_1(y) \geq 8 - 4 - 8 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$. Keďže $8 \cdot \frac{1}{18} = \frac{4}{9}$, tak sa podľa pravidla (2.) rozposiela od vrcholov x a y ešte po náboji $\frac{1}{18}$. Náboj 3-steny f potom bude $c^*(f) = c_2(f) = -1 + 2 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{18} = 0$.

2.2. Nech je teraz vrchol x práve 7-vrchol.

2.2.1. Ak y je veľký d-vrchol, tak využijúc pravidlá (2.) ($c_1(y) \geq d - 4 - \frac{4}{9} \cdot d = \frac{5}{9} \cdot d - 4 \geq \frac{1}{18} \cdot d$) resp. (4.) odovzdáva $\frac{1}{18}$ stene f resp. $\frac{1}{3}$ vrcholu x. Následne 7-vrchol x je incidentný s najviac 6 nepravými stenami, teda použitím pravidla (5.) každej posiela $\frac{\frac{1}{3}}{6} = \frac{1}{18}$. Stena f bude mať náboj $c^*(f) \geq -1 + 2 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{18} = 0$.

2.2.2. Ak vrchol y je 9-, 10- resp. 11-vrchol, tak stena f bude mať po aplikovaní pravidiel (1.)-(3.) náboj $c^*(f) \geq -1 + 2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = 0$ (keďže $c_2(y) \geq 9 - 4 - 8 \cdot \frac{4}{9} - \frac{1}{3} - 8 \cdot \frac{1}{18} = \frac{2}{3}$, $c_2(y) \geq 10 - 4 - 10 \cdot \frac{4}{9} - 10 \cdot \frac{1}{18} = 1$ resp. $c_2(y) \geq 11 - 4 - 10 \cdot \frac{4}{9} - \frac{1}{3} - 10 \cdot \frac{1}{18} = \frac{5}{3}$ tak sa aplikuje aj pravidlo (3.) s príspevkom $\frac{1}{18}$, lebo $\frac{2}{3} > 8 \cdot \frac{1}{18}$, $1 > 10 \cdot \frac{1}{18}$ resp. $\frac{5}{3} > 10 \cdot \frac{1}{18}$).

2.2.3. Nech teraz vrchol y je 8-vrchol. Tým pádom môže prispievať nábojom $\frac{1}{18}$ podľa pravidla (2.) Ak je 7-vrchol x incidentný s aspoň jednou $\geq$4-stenou, tak jeho náboj je $c_1(x) \geq 7 - 4 - 6 \cdot \frac{4}{9} = \frac{3}{9}$ a podľa pravidla (2.) môže posielať nepravým 3-stenám náboj $\frac{1}{18}$, lebo $6 \cdot \frac{1}{18} = \frac{3}{9}$. Pre f potom platí: $c^*(f) \geq -1 + 2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = 0$. Nech je v ďalšom vrchol x incidentný iba so samými 3-stenami. Ak sú aspoň tri pravé, tak $c_1(x) \geq 7 - 4 - 4 \cdot \frac{4}{9} - 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$. Teda x má dostatočný náboj na uskutočnenie pravidla (2.) ($4 \cdot \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$). Náboj 3-steny f je potom nezáporný vďaka príspevku $\frac{1}{18}$ od 8-vrchola y a od 7-vrchola x, teda $c^*(f) \geq -1 + 2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = 0$. Ak je x incidentný s práve jednou pravou 3-stenou, tak sa musí objaviť veľký vrchol. Ak je to jeden zo susedných vrcholov vrchola x, tak podľa pravidla (4.) posiela vrcholu x náboj $\frac{1}{3}$ a tým sa vytvorí príspevok $\frac{1}{18}$ pre stenu f od vrchola x (7-vrchol je incidentný s najviac 6 nepravými 3-stenami). Ak je x veľký, tak vieme, že dokáže posielať stene f podľa pravidla (2.) náboj $\frac{1}{18}$. Teda vždy sa získa žiadaný náboj od vrchola x a y.

2.2.4. Nech je teraz y 7-vrchol. Odvolávajúc sa na prípad 2.2.3 sa od každého 7-vrchola získa pre stenu f ešte náboj aspoň $\frac{1}{18}$. Teda $c^*(f) \geq -1 + 2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = 0$.

Stredný vrchol stupňa d posiela náboj podľa pravidla (1.). Potom ak má dostatočný náboj, tak sa uplatňujú ďalšie pravidlá. Náboj vrchola zostane vždy nezáporný. Pri pravidle (1.) môže byť nepravých 3-stien najviac $2 \cdot \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, je to potom $d - 4 - 2 \cdot \lfloor \frac{d}{2} \rfloor \cdot \frac{4}{9} - (d - 2 \cdot \lfloor \frac{d}{2} \rfloor) \cdot \frac{1}{3} \geq 0$ pre $d \geq 7$.

Skúmajme veľký vrchol x stupňa d po aplikovaní pravidiel (1.), (2.) a (4.). Nech n (resp. p) je počet nepravých (resp. pravých) 3-stien incidentných s x a nech s je počet susedných 7-vrcholov. Zrejme platia nerovnosti $p+n \leq d$ a $s \leq d$. Keďže však každá dvojica nepravých 3-stien bráni výskyt aspoň jedného 7-vrchola, tak platí nerovnosť $p+n+s \leq 2 \cdot d - \frac{n}{2}$ (ekvivalentne $p + \frac{3}{2} \cdot n + s \leq 2 \cdot d$ a takisto $-\frac{1}{3} \cdot p - \frac{1}{2} \cdot n - \frac{1}{3} \cdot s \geq -\frac{2}{3} \cdot d$). Potom $d - 4 - \frac{4}{9} \cdot n - \frac{1}{3} \cdot p - \frac{1}{18} \cdot n - \frac{1}{3} \cdot s = d - 4 - \frac{1}{2} \cdot n - \frac{1}{3} \cdot p - \frac{1}{3} \cdot s \geq d - 4 - \frac{2}{3} \cdot d \geq \frac{1}{3} \cdot d - 4 \geq 0$ pre $d \geq 12$.

Týmto sme získali také prerozdelenie náboja, že $\sum_{x \in F^{\times} \cup V^{\times}} c^*(x) \geq 0$, čo je spor. $\square$

5 Ťažké grafy

V tejto časti budeme dokazovať niektoré postačujúce podmienky pre ťažké podgrafy v triede 1-planárnych grafov s určenými minimálnymi stupňami $\delta \in \{4, 5, 6\}$. Najprv si zavedieme pojmy prevzaté z [2], ktoré budeme používať neskôr. Majme súvislý 1-planárny graf G na aspoň 3 vrcholoch. Nech $D(G)$ je jeho nakreslenie v rovine. Nech u, v sú dva zvláštne vrcholy ležiace na vonkajšej stene diagramu $D(G)$. Trojicu $(D(G), u, v)$ budeme nazývať *rezom*, kde vrcholy u a v budú *póly rezu*. Pod $(D(G), u, v; n)$*-melónom* budeme rozumieť nasledovne zostrojený graf: vezmeme n kópií (rezov) $D(G)$, stotožníme všetky vrcholy prislúchajúce vrcholu u s novým vrcholom a rovnako všetky vrcholy prislúchajúce vrcholu v s iným novým vrcholom. Ak boli u a v susedné, tak odstránime násobné hrany. Poznamenajme, že získaný graf má 1-planárne nakreslenie. Dva nové vrcholy získané z takého stotožnenia sa budú nazývať *póly melónu*.

Taktiež použijeme v dôkazoch špeciálne typy grafov. Pod *r-bokou bipyramídou* budeme rozumieť graf získaný z r-kružnice $C_r = [x_1 x_2 \dots x_r]$ pridaním dvoch nových vrcholov a, b a nových hrán ax_i, bx_i pre $i = 1, \dots, r$. Graf K_4^- je kompletný graf na 4 vrcholoch bez jednej hrany. Graf $K_{1,3}^+$ je 3-hviezda S_3 s jednou ďalšou hranou. Graf $K_6 - 2K_2$ je kompletný graf na 6 vrcholoch bez dvoch nesusedných hrán.

5.1 Ťažké grafy v triede 1-planárnych grafov

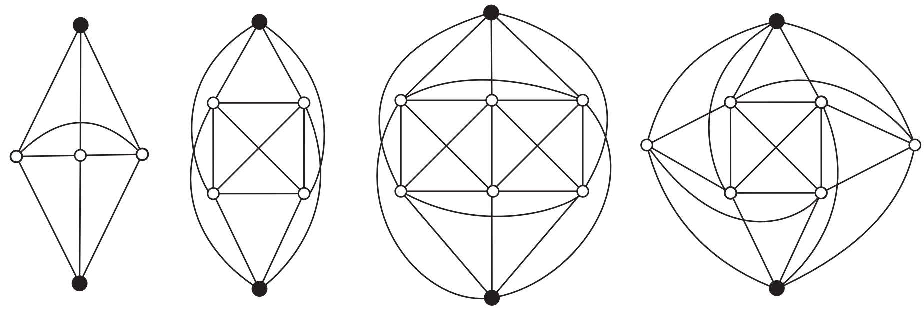
Podľa [2] platia nasledujúce tvrdenia.

Lema 5.1. *Ak G je 1-planárny graf s $|V(G)| > 3$ alebo $G = C_3$, tak G je ťažký v triede $\mathcal{P}_4^1$.*

Lema 5.2. *Ak G je 1-planárny graf s $|V(G)| > 4$ alebo $G \in \{K_4, K_4^-, S_3^+, C_3, C_4\}$, tak G je ťažký v triede $\mathcal{P}_5^1$.*

Lema 5.3. *Ak G je 1-planárny graf s $|V(G)| > 6$ alebo $G \cong K_6 - 2K_2$, tak G je ťažký v triede $\mathcal{P}_6^1$.*

Dôkaz.
Trieda $\mathcal{P}_4^1$:
Nech G je 1-planárny graf s $|V(G)| > 3$. Nech S je prvý graf vľavo z obrázku 18 a nech u, v sú vrcholy stupňa 3. Nech $\tilde{G}$ je $(S, u, v; m)$-melón. Graf H zostrojíme nasledovne: vezmeme 1-planárny diagram $D(G)$ grafu G. Pre každú nepreťatú hranu $e \in E(G)$ vezmeme kópiu $\tilde{G}$ a stotožníme póly melóna s koncovými vrcholmi hrany e. Všetky tieto stotožnenia sa vykonajú so zachovaním 1-planárnosti grafu. Ak naopak každá hrana $D(G)$ je preťatá, tak pre každú dvojicu preťatých hrán xy, $x'y'$ vezmeme štyri kópie $\tilde{G}$ a stotožníme póly melónu s vrcholmi x, x' a s ďalšími dvojicami vrcholov x, y' , y, x' a y, y'. Opäť má takto zostrojený graf 1-planárny diagram. Dostali sme 1-planárny graf H, ktorého všetky podgrafy indukované na vrcholoch stupňa $< m$ majú tri vrcholy.



Obrázok 18: Grafy na vytvorenie melónov podľa [2]

Pre dôkaz tvrdenia o grafe C_3 stačí uvažovať graf m-bokej bipyramídy. Takýto graf patrí do $\mathcal{P}_4^1$ a každá jeho 3-kružnica obsahuje m-vrchol.

Trieda$\mathcal{P}_5^1$:
Pre 1-planárny graf G s $|V(G)| > 4$ použijeme rovnakú konštrukciu ako

v predchádzajúcom dôkaze, kde S bude druhý graf z obrázku 18 s vrcholmi u, v jeho 4-vrcholmi.

Nech v ďalšom $G \in \{K_4^-, K_{1,3}^+, C_3\}$. Zostrojme graf H nasledovne: vezmime dve m-kružnice $[x_1x_2\dots x_m]$, $[y_1y_2\dots y_m]$ a dva nové vrcholy a, b. Pridajme nové hrany $ax_i, by_i, x_iy_{i+1}, y_ix_{i+1}$ pre $i = 1, \dots, m$ (pričom sa indexy prepočítavajú modulo m). Takto získaný graf patrí do $\mathcal{P}_5^1$, obsahuje izomorfné kópie G a každá 3-kružnica obsahuje m-vrchol.

Nakoniec nech $G \in \{K_4, C_4\}$. Graf H zostrojíme pomocou nasledujúcej konštrukcie: vezmime dve m-kružnice $[a_1c_1a_2c_2\dots a_{\frac{m}{2}}c_{\frac{m}{2}}], [b_1d_1b_2d_2\dots b_{\frac{m}{2}}d_{\frac{m}{2}}]$ a dva nové vrcholy a, b. Pridajme nové hrany $aa_i, ac_i, bb_i, bd_i, a_ia_{i+1}, b_ib_{i+1}, c_id_i, c_id_{i+2}$ pre $i = 1, \dots, m$ (pričom sa indexy prepočítavajú modulo m). Takto získaný graf patrí do $\mathcal{P}_5^1$ a každý jeho podgraf izomorfný s G obsahuje m-vrchol.

Trieda$\mathcal{P}_6^1$:

Pre 1-planárny graf G s $|V(G)| > 6$ použijeme rovnakú konštrukciu ako v prvom dôkaze, kde S bude tretí graf z obrázku 18 s vrcholmi u, v jeho 5-vrcholmi. Na dôkaz tvrdenia o grafe $K_6 - 2K_2$ uvažujme rovinné nakreslenie $K_{2,m}$ a nahraďme každú 4-stenu kópiou S (kde S je štvrtý graf z obrázku 18) tak, že m-vrcholy budú stotožnené s dvoma tmavými vrcholmi u, v na S. Označme výsledný graf H. Keďže graf $K_6 - 2K_2$ nie je podgrafom $S - u - v$ (a tak isto nie je podgrafom podgrafu H indukovaného na bielych vrcholoch), každá jeho kópia v H obsahuje jeden z pólov, čo dokazuje tvrdenie. $\square$

Túto kapitolu ukončíme niekoľkými otvorenými problémami. Otázkou zostáva, či $P_3 \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4^1)$ a či $P_4, S_3 \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_5^1)$.

6 Záver

V tejto diplomovej práci sme prezentovali prierez lokálnych i globálnych vlastností 1-planárnych grafov; sústredili sme sa najmä na vlastnosti maximálnych 1-planárnych grafov, vzťah medzi minimálnym stupňom a obvodom a existenciu ľahkých grafov v tejto triede grafov. Okrajovo sme tiež naznačili (inšpirovaní podobnými výsledkami pre planárne grafy) niektoré smery možného skúmania hamiltonovských a farebnostných vlastností 1-planárnych grafov.

Z hľadiska lokálnych vlastností 1-planárnych grafov ostávajú ešte otvorené celé okruhy problémov, ktorých analógie sú pre planárne grafy už rozriešené. Uveďme niekoľko príkladov: existencia ľahkých grafov v triedach 1-planárnych grafov s predpísaným minimálnym stupňom a minimálnou váhou hrán, otázka incidencie vrcholov malých stupňov s krátkymi kružnicami, obdoba Lebesgueovej vety o typoch stien rovinných grafov (pre 1-planárne grafy by sme mohli uvažovať typy kružníc malých dĺžok, resp. typy dané stupňami malých vrcholov a ich susedov), úplná analógia Kotzigovej vety o ľahkej hrane (vo verzii s vymenovanými stupňami koncových vrcholov) tak pre celú triedu 1-planárnych grafov, ako aj pre podtriedy vymedzené predpísaným minimálnym stupňom a obvodom, obdoba vety o ľahkej k-ceste v 3-súvislých planárnych grafoch.

1-planárne grafy vykazujú mnohé podobné vlastnosti v porovnaní s planárnymi. Ich výskum je však doteraz v začiatkoch a do budúcnosti zostáva množstvo otáznikov. Zodpovedanie už uvedených ciest možného skúmania by mohol priniesť cenné výsledky modernej teórie grafov.

Zoznam literatúry

[1] R. Diestel: *Graph Theory*, Springer-Verlag Heidelberg, New York, 1997.

[2] I. Fabrici, T. Madaras: *The structure of 1-planar graphs*, Discrete Math. **307** (2007) 854-865.

[3] S. Fiorini, R.J. Wilson: *Edge colourings of graphs*, Research notes in Mathematics 16, Pitman, 1977.

[4] H. Hind, Y. Zhao: *Edge colorings of graphs embeddable in a surface of low genus*, Discrete Math. **190** No. **1-3** (1998) 107-114.

[5] S. Jendroľ, T. Madaras, R. Soták, Zs. Tuza: *On light cycles in plane triangulations*, Discrete Math. **197/198** (1999) 453-467.

[6] S. Jendroľ, H.-J. Voss: *Light subgraphs of graphs embedded in plane - a survey*, preprint, Inst. of Algebra MATH-AL-2-2001, TU Dresden

[7] E. Jucovič: *Konvexné mnohosteny*, Veda, Bratislava, 1981.

[8] T. Kaiser, Z. Ryjáček, D. Kráľ, M. Rosenfeld, H.-J. Voss: *Hamilton cycles in prisms*, J. Graph Theory **56** No. 4 (2007) 249-269; Dostupné online: http://cam.zcu.cz/ ryjacek/publications/files/60.pdf

[9] M. Klešč: *The crossing numbers of* $K_5 \times P_n$, Tatra Mountains Math. Publ. **18**, (1999), 63-68.

[10] V.P. Korzhik: *Minimal non-1-planar graphs*, Discrete Math. **308** (2008) 1319-1327.

[11] V.P. Korzhik, B. Mohar: *Minimal Obstructions for 1-Immersions and Hardness of 1-Planarity testing*, preprint.

[12] B. Mohar: *Light paths in* 4*-connected graphs in the plane and other surfaces*, J. Graph Theory **34** No. **2** (2000) 170-179.

[13] J. Pach, G. Tóth: *Graphs drawn with few crossings per edge*, Combinatorica **17** (3) (1997) 427-439.

[14] D.P. Sanders, Y. Zhao: Coloring edges of graphs embedded in a surface of characteristics zero, J. Graph Theory, Ser. B **87** No. **2** (2003) 254-263.