Ohraničenosť a apriórne odhady riešení eliptických systémov

Autor: Sándor Kelemen

Školiteľ: doc. RNDr. Pavol Quittner DrSc.

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA MATEMATICKEJ ANALÝZY A NUMERICKEJ MATEMATIKY

Abstrakt

V našej práci študujeme eliptický nelineárny systém s dvoma komponentami na hladkej ohraničenej oblasti, pričom nelinearity spĺňajú polynomiálne rastové predpoklady. Hľadáme nutné a postačujúce podmienky zaručujúce ohraničenosť a apriórne odhady nezáporných, veľmi slabých riešení. Takáto úloha bola v minulosti študovaná v prípade, keď obe komponenty spĺňali okrajové podmienky rovnakého typu (Dirichletove alebo Neumannove). My sme si položili otázku, ako sa zmenia príslušné výsledky pre úlohu so zmiešanými okrajovými podmienkami.

Pomocou nových $L^p - L^q$ odhadov v klasických aj vo váhových Lebesgueových priestoroch sme našli hľadané nutné a postačujúce podmienky a získané výsledky sme potom pomocou teórie stupňa zobrazenia aplikovali na dôkaz existencie netriviálneho riešenia.

Kľúčové slová: Veľmi slabé riešenia, eliptické systémy, kritické exponenty, apriórne odhady

Poďakovanie

Ďakujem výnimočnému školiteľovi doc. RNDr. Pavlovi Quittnerovi DrSc. za odborné vedenie, vynikajúce nápady a za nekonečnú trpezlivosť voči mne.

Obsah

Zoznam obrázkov

1 Úvod

Predpokladajme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je hladká ohraničená oblasť. V celej práci budeme používať Lebesgueove priestory $L^p := L^p(\Omega)$ a tiež váhové Lebesgueove priestory $L^p_\delta := L^p_\delta(\Omega) = L^p(\Omega, \delta(x)\mathrm{d}x)$ pre $1 \le p \le \infty$ s váhou

$$\delta(x) := \mathrm{dist}\{x, \partial\Omega\}.$$

Uvedomme si, že $L^\infty = L^\infty_\delta$ (pretože množina má nulovú mieru vzhľadom na mieru dx práve vtedy, keď má nulovú mieru vzhľadom na $\delta(x)\mathrm{d}x$).

Označme $\lambda_1 > 0$ prvé vlastné číslo operátora $-\Delta$ v Sobolevovom priestore $H^1_0(\Omega) = W^{1,2}_0(\Omega)$ a k nemu prislúchajúcu nezápornú vlastnú funkciu $\varphi_1 \in H^1_0(\Omega)$, pričom $||\varphi_1||_{H^1_0(\Omega)} = 1$. Vieme, že hladkosť Ω nám zaručí existenciu konštanty $C > 0$ pre ktorú

$$C^{-1}\delta(x) \le \varphi_1(x) \le C\delta(x). \tag{1.1}$$

Nech $A \subset \mathbb{R}^k$ je otvorená a $B \subset \mathbb{R}^l, C \subset \mathbb{R}^m$ sú ľubovoľné. Hovoríme že funkcia $h : A \times B \to C$ je Carathéodoryho, značíme $h \in \mathrm{Car}(A, B; C)$, ak

(i) $h(x, \cdot) : B \to C$ je spojitá pre skoro všetky $x \in A$.

(ii) $h(\cdot, u) : A \to C$ je merateľná pre každé $u \in B$.

1.1 Kritické exponenty a apriórne odhady pre skalárne úlohy

V krátkosti zhrnieme poznatky o nelineárnej Dirichletovej okrajovej úlohe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x, u), \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \qquad\quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.2}$$

a o nelineárnej Neumannovej okrajovej úlohe

$$\begin{aligned} -\Delta v + v &= g(x,v), \quad x \in \Omega, \\ \partial_\nu v &= 0, \qquad\quad\; x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Hovoríme, že u (resp. v) je *veľmi slabým* (neskôr len v.s.) riešením úlohy (1.2) (resp. (1.3)) ak $u \in L^1, f(\cdot, u(\cdot)) \in L^1_\delta$ (resp. $v \in L^1, g(\cdot, v(\cdot)) \in L^1$) a platí identita

$$\int_\Omega u\,(-\Delta\phi)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(\cdot,u)\phi\mathrm{d}x \qquad \left(\text{resp. } \int_\Omega v\,(-\Delta\phi+\phi)\mathrm{d}x = \int_\Omega g(\cdot,v)\phi\mathrm{d}x\right)$$

pre každé $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$ také, že $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ (resp. $\partial_\nu\phi|_{\partial\Omega} = 0$).

Nech $\mathbb{R}^+ := [0,\infty)$ a zvoľme pevne parametre $1 < p, q < \infty$. Predpokladajme že nelinearity

$$f, g \in \mathrm{Car}(\Omega, \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$$

spĺňajú polynomiálne rastové predpoklady

$$\begin{aligned} f(x,u) &\le c(1+u^p), \\ g(x,v) &\le c(1+v^q) \end{aligned} \tag{1.4}$$

pre každé $u, v \in \mathbb{R}^+$ a pre skoro všetky $x \in \Omega$. Platí nasledujúce tvrdenie, dôkaz pozri v [1, 3].

Veta 1.1. *Položme*

$$p_{BT} := \begin{cases} \frac{N+1}{N-1}, & ak\ N > 1, \\ \infty, & ak\ N = 1, \end{cases} \qquad p_{sg} := \begin{cases} \frac{N}{N-2}, & ak\ N > 2, \\ \infty, & ak\ N \le 2. \end{cases}$$

Máme nasledujúci výsledok:

(i) *Ak $p < p_{BT}$ (resp. $q < p_{sg}$), tak všetky nezáporné v.s. riešenia úlohy* (1.2) *(resp.* (1.3)*) sú ohraničené.* ***(Ohraničenosť)***

(ii) *Ak $p < p_{BT}$ (resp. $q < p_{sg}$) a $f \in \mathrm{Car}(\Omega, \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ (resp. $g \in \mathrm{Car}(\Omega, \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$) spĺňa okrem* (1.4) *naviac podmienku superlinearity $f \ge \lambda u - C_1$ (resp. $g \ge \eta v - C_1$) pre konštanty $\lambda > \lambda_1, \eta > 1, C_1 > 0$, tak pre všetky nezáporné v.s. riešenia u úlohy* (1.2) *(resp. v úlohy* (1.3)*) platí odhad $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C$ (resp. $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \le C$), kde konštanta $C > 0$ nezávisí od u (resp. v).* ***(Apriórny odhad)***

(iii) *Exponenty p_{BT}, p_{sg} sú optimálne v tom zmysle, že pre $p > p_{BT}$ (resp. $q > p_{sg}$) existuje $f \in \mathrm{Car}(\Omega, \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ (resp. $g \in \mathrm{Car}(\Omega, \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$) spĺňajúce* (1.4) *a také, že úloha* (1.2) *(resp.* (1.3)*) má neohraničené v.s. nezáporné riešenie.* ***(Optimalita)***

Kritický exponent p_{BT} je pomenovaný na počesť matematikov Brezis a Turner, oni našli apriórne odhady pre *slabé* - resp. *variačné* - riešenia, pre podrobnosti viď [12].

Druhý kritický exponent p_{sg} má skratku podľa anglického slova „singular“, pretože rovnica $-\Delta u = u^p$ pre $p > p_{sg}$ má neohraničené kladné *distributívne* riešenie na $\mathbb{R}^N$, pre detaily viď [1, Remarks 3.6. (i)].

O skalárnej úlohe (1.2) sa vie veľmi veľa o neexistencii riešenia, o kritickom exponente pre klasické riešenie, skalárne úlohy tohoto typu sa študujú aj pre pravú stranu, ktorá mení znamienko, alebo ktorá má exponenciálny rast. Tiež je pozoruhodný výsledok, ktorý spája otázku existencie globálneho klasického riešenia evolučných (parabolických) nelineárnych úloh a otázku existencie v.s. riešenia príslušných stacionárnych úloh.

1.2 Kritické paramete p, q a apriórne odhady pre systémy

V našej práci budeme študovať nasledujúcu okrajovú úlohu so zmiešanými okrajovými podmienkami pre systém nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x,v), & x \in \Omega, \\ -\Delta v + v &= g(x,u), & x \in \Omega, \\ u = \partial_\nu v &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.5}$$

kde $f, g \in \mathrm{Car}(\Omega, \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ spĺňajú rastové predpoklady

$$\begin{aligned} f(x,v) &\le c(1+v^p), \\ g(x,u) &\le c(1+u^q) \end{aligned} \tag{1.6}$$

pre s.v. $x \in \Omega$, pre každé $u, v \in \mathbb{R}^+$, kde $1 < p, q < \infty$.

Podrobnú definíciu v.s. riešenia úlohy (1.5) uvedieme na začiatku kapitoly 3. Naša motivácia študovať úlohu typu (1.5) je nasledujúca. Označme $(1.5)_D$ a $(1.5)_N$ úlohy, ktoré sú úplne totožné s (1.5) až na okrajové podmienky. Pre $(1.5)_D$ uvažujme Dirichletove podmienky $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0$ a pre $(1.5)_N$ Neumannove podmienky $\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \partial_\nu v|_{\partial\Omega} = 0$.

Úlohy typu $(1.5)_D$ a $(1.5)_N$ sú už hlboko preštudované (pozri [1, 2, 3, 13, 14]). Uvedieme výsledky pre tieto úlohy, aby sme ich neskôr mohli porovnať s našimi výsledkami pre zmiešanú okrajovú úlohu (1.5). Zaveďme označenia

$$\alpha := \frac{2(p+1)}{pq-1}, \quad \beta := \frac{2(q+1)}{pq-1}. \tag{1.7}$$

Dôkaz nasledujúcej vety čitateľ nájde v [1, 2, 3].

Veta 1.2. *Položme $M := \max\{\alpha, \beta\}$, potom platí:*

(i) Ak $M > N-1$ (resp. $M > N-2$), tak pre všetky nezáporné v.s. riešenia (u,v) úlohy $(1.5)_D$ (resp. $(1.5)_N$) je $u, v \in L^\infty$. ***(Ohraničenosť)***

(ii) Ak $M > N-1$ (resp. $M > N-2$), a okrem (1.6) je naviac splnená podmienka superlinearity

$$f + g \geq \lambda(u+v) - C_1 \qquad \text{(resp. } f + g \geq \eta v - C_1\text{)}$$

pre konštanty $\lambda > \lambda_1, \eta > 1, C_1 > 0$, tak pre všetky nezáporné v.s. riešenia (u,v) úlohy $(1.5)_D$ (resp. $(1.5)_N$) platí odhad

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C,$$

kde konštanta $C > 0$ nezávisí od (u,v). ***(Apriórny odhad)***

(iii) Podmienky na číslo M v časti (i) sú optimálne v tom zmysle, že pre $M < N-1$ (resp. $M < N-2$) existuje $f, g \in \mathrm{Car}(\Omega, \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ spĺňajúce (1.6) a také, že úloha $(1.5)_D$ (resp. $(1.5)_N$) má také nezáporné v.s. riešenie (u,v), že $u \notin L^\infty$ a $v \notin L^\infty$. ***(Optimalita)***

V našej práci riešime nasledujúce otázky:

(i) Pre aké parametre p, q sú nezáporné v.s. riešenia úlohy (1.5) automaticky ohraničené?

(ii) Pre aké parametre p, q existuje neohraničené nezáporné v.s. riešenie?

(iii) Pre aké parametre p, q platí apriórny odhad $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$, pre nezáporné v.s. riešenia úlohy (1.5)?

1.3 Označenia

Pre Banachove priestory V, W symbolom $\mathscr{L}(V,W)$ označujeme priestor spojitých lineárnych operátorov z V do W. Normu v tomto priestore značíme ako $||\cdot||_{\mathscr{L}(V,W)}$.

$C_c^\infty(\Omega)$ je priestor hladkých funkcií s kompaktným nosičom v Ω.

Vo viacerých dôkazoch symbolom C budeme označovať rôzne kladné konštanty, ktoré sa môžu meniť, ale len v závislosti od parametrov dokazovanej vety. Túto symboliku používame veľmi opatrne a budeme upozorňovať čitateľa na správne pochopenie výrokov.

Pre funkcie $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ a bod $z_0 \in \overline{\Omega}$ výrok $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1$ symbolicky zapisujeme ako $f(z) \sim g(z)$ pre $z \to z_0$.

V Banachovom priestore X pre $x \in X$ a $\alpha > 0$ definujeme otvorenú guľu $B(x, \alpha) := \{y \in X : ||x - y||_X < \alpha\}$.

Hovoríme, že $w \in L^1$ je ohraničená, ak $w \in L^\infty$.

Skratkou „s.v.“ rozumieme „skoro všade“ alebo „skoro všetky“ podľa kontextu.

2 Lineárna teória

V tejto kapitole študujeme Dirichletovu okrajovú úlohu

$$\begin{aligned} -\Delta u = f, \qquad & x \in \Omega, \\ u = 0, \qquad & x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.1}$$

a Neumannovu okrajovú úlohu

$$\begin{aligned} -\Delta v + v = g, \qquad & x \in \Omega, \\ \partial_\nu v = 0, \qquad & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je hladká ohraničená oblasť a $\nu(x)$ je jednotková vonkajšia normála hranice $\partial\Omega$ v bode x (∂_ν je operátor smerovej derivácie v smere ν). V celej práci budeme predpokladať, že $N \geq 3$ (prípad $N \leq 2$ prediskutujeme v Poznámke 3.4). Môžeme sa pýtať, prečo uvažujeme v (2.2) operátor $-\Delta + I$ a nie jednoduchší $-\Delta$; robíme to preto, aby sme mali zaručenú jednoznačnosť riešenia (v prípade operátora $-\Delta$ potrebujeme okrem okrajovej podmienky aj inú podmienku na jednoznačnosť, pozri [8]).

Definícia 2.1. *Nech $f \in L^1$ (resp. $f \in L^1_\delta$). Hovoríme, že $u \in L^1$ je* ***veľmi slabým*** L^1 ***- riešením*** *(resp. L^1_δ* ***- riešením****) úlohy* (2.1) *ak platí*

$$\int_\Omega u\,(-\Delta\phi)\mathrm{d}x = \int_\Omega f\phi\mathrm{d}x$$

pre každé $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$ také, že

$$\phi(x) = 0 \quad \text{pre } x \in \partial\Omega.$$

Definícia 2.2. *Nech $g \in L^1(\Omega)$. Hovoríme, že funkcia $v \in L^1$ je* ***veľmi slabým*** L^1 *-* ***riešením*** *úlohy* (2.2) *ak platí*

$$\int_\Omega v\,(-\Delta\phi + \phi)\mathrm{d}x = \int_\Omega g\phi\mathrm{d}x$$

pre každé $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$ také, že

$$\partial_\nu \phi(x) = 0 \quad \text{pre } x \in \partial\Omega.$$

2.1 Reprezentácia klasických riešení

Vieme (viď [4, Theorem 12]), že pre klasické riešenie $u \in C^2(\overline{\Omega})$ úlohy (2.1) platí

$$u(x) = \int_\Omega \mathcal{G}(x,y)f(y)\mathrm{d}y, \qquad x \in \Omega, \tag{2.3}$$

kde $\mathcal{G}(x,y)$ je *Greenova funkcia* definovaná vzťahom:

$$\mathcal{G}(x,y) = \Phi(y-x) - \phi^{(x)}(y), \qquad x,y \in \Omega, x \neq y,$$

kde

$$\Phi(z) = \frac{1}{N(N-2)\alpha(N)}\frac{1}{|z|^{N-2}}, \qquad z \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

pričom $\alpha(N)$ je objem jednotkovej gule $B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$. Ďalej $\phi^{(x)}$ pre fixované $x \in \Omega$ je jediným riešením úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta\phi^{(x)} &= 0, & y \in \Omega, \\ \phi^{(x)}(y) &= \Phi(y-x), & y \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Takýto výsledok teraz odvodíme (analogickými úvahami ako v [4]) pre úlohu (2.2). Položme

$$\Psi(z) := \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-\frac{|z|^2}{4s}-s}s^{-\frac{n}{2}}\mathrm{d}s, \quad z \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Táto funkcia je (viď [4, str. 186,187]) fundamentálnym riešením operátora $-\Delta v + v$ na $\mathbb{R}^N$ (podobne ako Φ pre $-\Delta u$). Definujme takzvaný *korektor* $\psi^{(x)} \in C^2(\overline{\Omega})$ pre ľubovoľný fixovaný bod $x \in \Omega$, ako jediné riešenie úlohy:

$$\begin{aligned} -\Delta\psi^{(x)} + \psi^{(x)} &= 0, & y \in \Omega, \\ \partial_\nu\psi^{(x)}(y) &= \partial_\nu\Psi(y-x), & y \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Existencia, jednoznačnosť a regularita funkcie $\psi^{(x)}$ je známa napríklad z [5, Theorem 3.3.2].

Lema 2.1. *Nech $v \in C^2(\overline{\Omega})$ je klasickým riešením úlohy* (2.2)*. Potom*

$$v(x) = \int_\Omega \mathcal{N}(x,y)g(y)\mathrm{d}y, \tag{2.4}$$

kde $\mathcal{N}$ sa nazýva Neumannovou funkciou a je definovaná pre $x, y \in \Omega, x \neq y$ nasledovne:

$$\mathcal{N}(x,y) = \Psi(y-x) - \psi^{(x)}(y).$$

DÔKAZ. Nech $x \in \Omega$ a $\varepsilon > 0$ je také, že $\overline{B(x,\varepsilon)} \subset \Omega$. Označme $V_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{B(x,\varepsilon)}$. Použitím Greenovej identity dostaneme

$$\int_{V_\varepsilon} [v(y)(-\Delta\Psi(y-x) + \Psi(y-x)) - \Psi(y-x)(-\Delta v(y) + v(y))]\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{\partial V_\varepsilon} [-v(y)\partial_{\nu_\varepsilon}\Psi(y-x) + \Psi(y-x)\partial_{\nu_\varepsilon}v(y)]\,\mathrm{d}S(y),$$

kde $\nu_\varepsilon(y)$ je jednotková vonkajšia normála hranice ∂V_ε v bode $y \in \partial V_\varepsilon$.

Túto identitu môžeme zjednodušiť na tvar:

$$\begin{aligned}\int_{V_\varepsilon} -\Psi(y-x)g(y)\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} -v(y)\partial_{\nu_\varepsilon}\Psi(y-x)\mathrm{d}S(y) - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} v(y)\partial_{\nu_\varepsilon}\Psi(y-x)\mathrm{d}S(y)\\ + \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \Psi(y-x)\partial_{\nu_\varepsilon}v(y)\mathrm{d}S(y).\end{aligned} \tag{2.5}$$

V [4] (str. 33,34) sú podrobne dokázané vzťahy:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} v(y)\partial_r\Phi(y-x)\mathrm{d}S(y) = v(x)$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)\partial_r v(y)\mathrm{d}S(y) = 0,$$

kde $r(z) = z/|z|$ pre $z \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Chceli by sme „nahradiť“ Φ v týchto vzťahoch funkciou Ψ. To môžeme naozaj urobiť, pretože

$$\Phi(z) \sim \Psi(z), \qquad \partial_r\Phi(z) \sim \partial_r\Psi(z)$$

pre $z \to 0$ (symbol $\sim$ je opísaný v podkapitole 1.3). Limitným prechodom pre $\varepsilon \to 0^+$ vo vzťahu (2.5) dostaneme

$$\int_\Omega -\Psi(y-x)g(y)\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} -v(y)\frac{\partial\Psi(y-x)}{\partial\nu}\mathrm{d}S(y) - v(x). \tag{2.6}$$

Znovu z Greenovej identity pre funkcie $v, \psi^{(x)}$:

$$\int_\Omega -\psi^{(x)}(y)(-\Delta v(y) + v(y))\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} -v(y)\frac{\partial\psi^{(x)}(y)}{\partial\nu}\mathrm{d}S(y).$$

Preto integrál cez hranicu v (2.6) môžeme prepísať pomocou posledného vzťahu a vyjadrením $v(x)$ dostaneme hľadanú reprezentáciu (2.4). $\square$

2.2 Odhady Greenovej a Neumannovej funkcie

Budeme potrebovať odhady funkcií $\mathcal{G}, \mathcal{N}$. Táto problematika nie je vôbec triviálna, v nasledujúcej leme uvedieme bez dôkazu výsledky z odbornej literatúry (pre podrobnosti viď [10, 8, 9, 3, 7, 11]).

Lema 2.2. *Existujú konštanty $C_1, C_2 > 0$ také že*

$$C_1 \min\left\{1, \frac{\delta(x)\delta(y)}{|x-y|^2}\right\} |x-y|^{2-N} \leq \mathcal{G}(x,y) \leq C_2 |x-y|^{2-N-1/r+1/s} \delta(x)^{-1/s} \delta(y)^{1/r}, \quad (2.7)$$

$$C_1 \mathcal{G}(x,y) \leq \mathcal{N}(x,y) \leq C_2 |x-y|^{2-N} \quad (2.8)$$

pre $x, y \in \Omega$ a $1 \leq r \leq s \leq \infty$.

2.3 Rieszov potenciál

Dôležitým aparátom pre ďalšie úvahy bude teória Rieszových potenciálov. Pre $0 < \alpha < N$ a $h \in L^1$ definujme *Rieszov potenciál* $I_\alpha(h)$ nasledovne:

$$[I_\alpha(h)](x) := \int_\Omega \frac{h(y)}{|x-y|^{N-\alpha}} \mathrm{d}y.$$

V knihe [6] je rozpracovaná teória týchto potenciálov, z nej máme nasledujúcu lemu (viď [6, Lemma 1.34]).

Lema 2.3. *Nech $0 < \alpha < N$ a $\alpha p \leq N$. Potom*

$$I_\alpha \in \mathscr{L}(L^p, L^q)$$

pre $1 \leq q < Np/(N - \alpha p)$.

Poznámka 2.1. Pre $0 < \alpha < N$ a $\alpha p > N$ dostaneme triviálne $I_\alpha \in \mathscr{L}(L^p, L^\infty)$. Naozaj, z Hölderovej nerovnosti

$$\begin{aligned}
|[I_\alpha(h)](x)| &\leq \int_\Omega \frac{|h(y)|}{|x-y|^{N-\alpha}} \mathrm{d}y \\
&\leq \left(\int_\Omega |h(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |x-y|^{(\alpha-N)p/(p-1)} \mathrm{d}y\right)^{(p-1)/p} \\
&\leq \left(\int_\Omega |h(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p} \left(\int_{\Omega^* := \{u-v \,|\, u,v \in \Omega\}} |z|^{(\alpha-N)p/(p-1)} \mathrm{d}z\right)^{(p-1)/p} \\
&\leq C\|h\|_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

kde

$$0 \leq C := \left(\int_{\Omega^*} |z|^{(\alpha-N)p/(p-1)} \mathrm{d}z \right)^{(p-1)/p} < \infty$$

pretože $(\alpha - N)p/(p-1) > (N/p - N)p/(p-1) = -N$ a Ω^* je ohraničená.

Preto Lemu 2.3 môžeme vysloviť aj tak, že pre $0 < \alpha < N$ a $1 \leq p, q \leq \infty$ také že

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{\alpha}{N}$$

je

$$I_\alpha \in \mathscr{L}(L^p, L^q).$$

2.4 Reprezentácia veľmi slabých riešení

Teraz ukážeme, že reprezentácie (2.3),(2.4) platia pre veľmi slabé riešenia úloh (2.1),(2.2). Presnejšie povedané ukážeme, že úlohy (2.1),(2.2) sú jednoznačne riešiteľné pre vhodnú pravú stranu vo veľmi slabom zmysle a riešenia sú dané vzťahmi (2.3),(2.4).

Lema 2.4. *Úlohy* (2.1),(2.2) *majú najviac jedno veľmi slabé riešenie.*

DÔKAZ. Urobíme dôkaz pre úlohu (2.2), pre (2.1) je dôkaz analogický. Nech v_1, v_2 sú dve veľmi slabé riešenia, potom ich rozdiel $\hat{v} = v_1 - v_2$ spĺňa

$$\int_\Omega \hat{v}(x)\,(-\Delta\phi(x) + \phi(x))\mathrm{d}x = 0$$

pre všetky $\phi \in C^2(\overline{\Omega}), \partial_\nu \phi|_{\partial\Omega} = 0$. Nech $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$, potom existuje jediná funkcia $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$ taká, že

$$\begin{aligned} -\Delta\phi + \phi = \xi, &\qquad x \in \Omega, \\ \partial_\nu \phi = 0, &\qquad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Preto pre každé $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$ máme

$$\int_\Omega \hat{v}\xi \mathrm{d}x = 0.$$

Na základe du Bois-Reymondovej lemy dostaneme $\hat{v} = 0$ s.v. v Ω a teda $v_1 = v_2$ s.v. v Ω. □

Lema 2.5. *Nech* $g \in L^1$ *potom*

$$v(x) := \int_\Omega \mathcal{N}(x,y)g(y)\mathrm{d}y \tag{2.9}$$

je jediným veľmi slabým riešením úlohy (2.2).

Dôkaz. Najprv ukážme, že v daný vzťahom (2.9) je v priestore L^1. Z (2.8) dostaneme

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^1(\Omega)} &\leq \int_\Omega\int_\Omega |\mathcal{N}(x,y)g(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leq C_2\int_\Omega\int_\Omega |x-y|^{2-N}|g(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &\leq C_2\int_\Omega I_2(|g|)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Potom z Lemy 2.3 (pri $p=q=1, \alpha=2$) je $\|v\|_{L^1(\Omega)} < \infty$.

Teraz ukážeme, že v je veľmi slabým riešením (2.2), potom na základe Lemy 2.4 bude dôkaz dokončený. Vieme, že $C_c^\infty(\Omega)$ je hustý v $L^1(\Omega)$, preto existuje postupnosť $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset C_c^\infty(\Omega)$ taká, že

$$g_n \to g \text{ pre } n \to \infty \text{ v priestore } L^1. \tag{2.10}$$

Úloha

$$\begin{aligned} -\Delta v + v = g_n, &\qquad x \in \Omega, \\ \partial_\nu v = 0, &\qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

má klasické rissšenie $v_n \in C^2(\overline{\Omega})$. Z Lemy 2.1 potom

$$v_n(x) = \int_\Omega \mathcal{N}(x,y)g_n(y)\mathrm{d}y.$$

Zo vzťahu (2.8) dostaneme

$$|v(x) - v_n(x)| \leq C_2\int_\Omega |x-y|^{2-N}|g(y)-g_n(y)|\mathrm{d}y = C_2 I_2(|g-g_n|)(x).$$

Z Lemy 2.3 (pri $p=q=1$) potom

$$\|v-v_n\|_{L^1(\Omega)} \leq C\|g-g_n\|_{L^1(\Omega)},$$

kde $C := C_2||I_2||_{\mathscr{L}(L^1,L^1)}$. Preto

$$v_n \to v \text{ pre } n \to \infty \text{ v } L^1(\Omega). \tag{2.11}$$

Z veľmi slabej formulácie klasických riešení máme, že pre každé

$$\phi \in C^2(\overline{\Omega}), \partial_\nu\phi|_{\partial\Omega} = 0$$

a pre každé prirodzené číslo n platí:

$$\int_\Omega v_n\,(-\Delta\phi + \phi)\mathrm{d}x = \int_\Omega g_n\phi\mathrm{d}x.$$

Ak v tomto vzťahu $n \to \infty$, tak na základe (2.10) a (2.11) dostaneme

$$\int_\Omega v\,(-\Delta\phi + \phi)\mathrm{d}x = \int_\Omega g\phi\mathrm{d}x.$$

Preto funkcia v je veľmi slabým riešením úlohy (2.2) a tým je lema dokázaná. □

Poznámka 2.2. Ak $f \in L^1$ (resp. $f \in L^1_\delta$) tak sa analogicky dokáže, že úloha (2.1) má jediné veľmi slabé L^1-riešenie (resp. $L^1_\delta-$riešenie) u a je dané vzťahom (2.3).

2.5 $L^p - L^q$ odhady

Voľne môžeme povedať, že v tejto podkapitole skúmame, akú integrabilitu majú v. s. riešenia (od teraz v.s. je skratka pre „veľmi slabé") úloh (2.1),(2.2), keď poznáme istú integrabilitu pravých strán.

Pre ľahšiú formuláciu sa budeme držať nasledujúcej dohody:

$$\infty \cdot 0 := \infty.$$

Lema 2.6. *Majme* $1 \le p, q \le \infty, f \in L^p_\delta$ *a nech* u *je v.s.* $L^1_\delta-$*riešením úlohy* (2.1). *Potom pre*

$$q(N + 1 - 2p) < Np$$

je $u \in L^q$ *a existuje konštanta* $C = C(\Omega, p, q) > 0$ *taká, že* $\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C\|f\|_{L^p_\delta(\Omega)}$.

Dôkaz. Vieme, že $u(x) = \int_\Omega \mathcal{G}(x, y)f(y)\mathrm{d}y$ pre s.v. $x \in \Omega$. Pomocou horného odhadu v (2.7) pre $r := p, s := \infty$ dostaneme:

$$\begin{aligned} ||u||^q_{L^q} &= \int_\Omega \left| \int_\Omega \mathcal{G}(x, y)f(y)\mathrm{d}y \right|^q \mathrm{d}x \le \\ &\le C_2^q \int_\Omega \left[\int_\Omega |x - y|^{2-N-1/p}|f(y)|\delta(y)^{1/p}\mathrm{d}y \right]^q \mathrm{d}x = \\ &= C_2^q \int_\Omega \left(I_{2-1/p}(|f|\delta^{1/p})\right)^q \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Preto lema bude dokázaná ak

$$I_{2-1/p} \in \mathscr{L}(L^p, L^q).$$

Ak teda (pozri Lemu 2.3) platí

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{2 - 1/p}{N}$$

tak je dôkaz ukončený. Všimnime si, že táto podmienka sa zhoduje s predpokladmi lemy.

$\square$

Lema 2.7. *Majme* $1 \le p, q \le \infty, f \in L^p_\delta$ *a nech* u *je v.s.* $L^1_\delta-$*riešením úlohy* (2.1). *Potom pre*

$$q(N + 1 - 2p) < (N + 1)p$$

je $u \in L^q_\delta$ *a existuje konštanta* $C = C(\Omega, p, q) > 0$ *taká, že* $\|u\|_{L^q_\delta(\Omega)} \le C\|f\|_{L^p_\delta(\Omega)}$.

DÔKAZ. Dokazujeme podobne, ako Lemu 2.6. Pomocou horného odhadu v (2.7) pre $r := p$ a $s := q$ (predpokladáme $p \leq q$) dostaneme:

$$\begin{aligned} ||u||^q_{L^q_\delta} &= \int_\Omega \left| \int_\Omega \mathcal{G}(x,y) f(y) \mathrm{d}y \right|^q \delta(x) \mathrm{d}x \leq \\ &\leq C_2^q \int_\Omega \left[\int_\Omega |x-y|^{2-N-1/p+1/q} |f(y)| \delta(y)^{1/p} \mathrm{d}y \right]^q \mathrm{d}x = \\ &= C_2^q \int_\Omega \left(I_{2-1/p+1/q}(|f|\delta^{1/p}) \right)^q \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Preto potrebujeme

$$I_{2-1/p+1/q} \in \mathscr{L}(L^p, L^q)$$

teda (pri Leme 2.3)

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{2 - 1/p + 1/q}{N}.$$

Táto podmienka sa zhoduje s predpokladmi lemy. □

Lema 2.8. *Majme* $1 \leq p, q \leq \infty, f, g \in L^p$ *a nech* u, v *sú v.s.* L^1-*riešenia úloh* (2.1),(2.2). *Nech*

$$q(N-2p) < Np.$$

Potom $u, v \in L^q$ *a existuje konštanta* $C = C(\Omega, p, q) > 0$ *taká, že*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} + \|v\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}).$$

DÔKAZ. Dôkaz je podobný dôkazom Liem 2.6,2.7. Stačí použiť horné odhady v (2.7) a (2.8) pre $r = s = \infty$. □

Budeme potrebovať nasledujúcu lemu o vnoreniach priestorov L^p, L^q_δ.

Lema 2.9. *Majme* $0 < C < \infty$. *Potom:*

(a) Pre $f \in L^p$ *platí*

$$f \in L^p_\delta, \qquad \|f\|_{L^p_\delta(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

pre konštantu $C_1 = C_1(\Omega, p) > 0$.

(b) Ak je $p > 2$ *tak pre* $f \in L^p_\delta$ *platí*

$$f \in L^r, \qquad \|f\|_{L^r(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{L^p_\delta(\Omega)},$$

pre $1 \leq r < p/2$ *a konštantu* $C_2 = C_2(\Omega, p, r) > 0$.

DÔKAZ.

(a) Táto časť plynie z nerovnosti:

$$\|f\|_{L^p_\delta(\Omega)} \leq \left(\max_\Omega \delta\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

(b) Pre $0 < a < 1$ z Hölderovej nerovnosti plynie

$$\int_\Omega f^r \mathrm{d}x = \int_\Omega f^r \delta^a \delta^{-a} \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega v^{\frac{r}{a}} \delta \mathrm{d}x\right)^a \left(\int_\Omega \delta^{-\frac{a}{1-a}} \mathrm{d}x\right)^{1-a}.$$

Aby druhý integrál na pravej strane bol konvergentný, treba $a < 1/2$. Ak teraz $r/a := p$, tak $a = r/p < 1/2$ a máme tvrdenie.

□

Lema 2.10. *Nech $1 \leq p_1, p_2, q \leq \infty$, $g \in L^{p_1}_\delta \cap L^{p_2}$ a v je v.s. L^1-riešením úlohy (2.2). Prepokladajme, že je splnená jedna z nasledujúcich troch podmienok*

$$\begin{aligned} p_1 \leq \frac{N+1}{N} p_2 &\quad \text{a súčasne} \quad q(N - 2p_2) < N p_1, \\ \frac{N+1}{N} p_2 < p_1 \leq 2p_2 &\quad \text{a súčasne} \quad q(N - 2p_2) < (N+1) p_2, \\ 2p_2 < p_1 &\quad \text{a súčasne} \quad 2q(N - p_1) < (N+1) p_1. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Potom existuje konštanta $C = C(\Omega, p_1, p_2, q) > 0$ taká, že

$$v \in L^q_\delta, \qquad ||v||_{L^q_\delta} \leq C(||g||_{L^{p_1}_\delta} + ||g||_{L^{p_2}}).$$

DÔKAZ. V dôkaze symbolom C budeme označovať rôzne kladné konštanty, ktoré sa môžu meniť, ale len v závislosti parametrov Ω, p_1, p_2, q.

Z Lemy 2.5

$$v(x) := \int_\Omega \mathcal{N}(x, y) g(y) \mathrm{d}y,$$

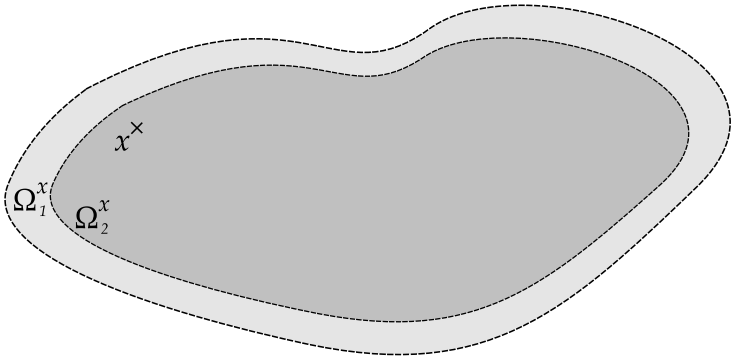
preto

$$||v||^q_{L^q_\delta} \leq \int_\Omega \left[\int_\Omega |\mathcal{N}(x, y)||g(y)| \mathrm{d}y\right]^q \delta(x) \mathrm{d}x.$$

Pre fixované $x \in \Omega$ položme

$$\begin{aligned} \Omega^x_1 &:= \{y \in \Omega \mid \delta(y) < \delta(x)/2\}, \\ \Omega^x_2 &:= \{y \in \Omega \mid \delta(y) > \delta(x)/2\}. \end{aligned}$$

Pozri obrázok 1.



Obr. 1: Množiny Ω_1^x, Ω_2^x

Z konvexnosti $a \to a^q$ máme existenciu konštanty $C > 0$ takej, že

$$(a+b)^q \leq C(a^q + b^q), \quad a, b \geq 0$$

preto

$$\begin{aligned} ||v||_{L^q_\delta}^q &\leq C \int_\Omega \left[\int_{\Omega_1^x} |\mathcal{N}(x,y)||g(y)| \mathrm{d}y \right]^q \delta(x) \mathrm{d}x \\ &+ C \int_\Omega \left[\int_{\Omega_2^x} |\mathcal{N}(x,y)||g(y)| \mathrm{d}y \right]^q \delta(x) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Položme pre $i = 1, 2$

$$J_i := \int_\Omega \left[\int_{\Omega_i^x} |\mathcal{N}(x,y)||g(y)| \mathrm{d}y \right]^q \delta(x) \mathrm{d}x.$$

Odhad pre J_1:

Pre $y \in \Omega_1^x$ platí $|x-y| > \delta(x)/2$. Potom pomocou horného odhadu v (2.8) dostaneme

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C \int_\Omega \left[\int_{\Omega_1^x} |x-y|^{2-N} |g(y)| \delta(x)^{1/q} \mathrm{d}y \right]^q \mathrm{d}x \\ &\leq C \int_\Omega \left[\int_{\Omega_1^x} |x-y|^{2-N+1/q} |g(y)| \mathrm{d}y \right]^q \mathrm{d}x \\ &\leq C \int_\Omega \left[\int_\Omega |x-y|^{2-N+1/q} |g(y)| \mathrm{d}y \right]^q \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ak je $p_1 \leq 2p_2$ tak Lema 2.9 nám nepomôže, vtedy použijeme predpoklad $g \in L^{p_2}$. Podľa Lemy 2.3 stačí dokázať, že

$$I_{2+1/q} \in \mathscr{L}(L^{p_2}, L^q).$$

Takto sa dopracujeme k nerovnosti

$$q(N - 2p_2) < (N + 1)p_2.$$

Ak je $p_1 > 2p_2$ tak Lema 2.9 nám pomôže. Dostaneme $g \in L^r$ pre $r < p_1/2$. Podľa Lemy 2.3 stačí dokázať, že

$$I_{2+1/q} \in \mathscr{L}(L^r, L^q).$$

Takto dostaneme podmienku

$$2q(N - p_1) < (N + 1)p_1.$$

Záver je teda, že $J_1 \leq C(||g||_{L^{p_1}_\delta} + ||g||_{L^{p_2}})$ ak je splnená jedna z nasledujúcich dvoch podmienok

$$\begin{aligned} &p_1 \leq 2p_2 \text{ a súčasne } q(N - 2p_2) < (N + 1)p_2, \\ &2p_2 < p_1 \text{ a súčasne } 2q(N - p_1) < (N + 1)p_1. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Odhad pre J_2:

Pre $y \in \Omega_2^x$ platí $\delta(y) > \delta(x)/2$. Pomocou horného odhadu v (2.8) dostaneme

$$\begin{aligned} J_2 &\leq C \int_\Omega \left[\int_{\Omega_2^x} |x - y|^{2-N} |g(y)| \delta(x)^{1/q} \mathrm{d}y \right]^q \mathrm{d}x \\ &\leq C \int_\Omega \left[\int_{\Omega_2^x} |x - y|^{2-N} |g(y)| \delta(y)^{1/q} \mathrm{d}y \right]^q \mathrm{d}x \\ &\leq C \int_\Omega \left[\int_\Omega |x - y|^{2-N} |g(y)| \delta(y)^{1/q} \mathrm{d}y \right]^q \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Teraz treba riešiť otázku (aby sme mohli používať aparát Lemy 2.3), pre aké r je $|g|\delta^{1/q} \in L^r$ ak predpokladáme, že $g \in L^p_\delta \cap L^{\tilde{p}}$? Z Hölderovej nerovnosti

$$\begin{aligned} \int_\Omega |g|^r \delta^{r/q} \mathrm{d}y &= \int_\Omega (|g|\delta^{1/p})^{\frac{rp}{q}} |g|^{r(1-p/q)} \mathrm{d}y \leq \\ &\leq \left(\int_\Omega |g|^p \delta \mathrm{d}y \right)^{r/q} \left(\int_\Omega |g|^{r(\frac{q-p}{q-r})} \mathrm{d}y \right)^{\frac{q-r}{q}}. \end{aligned}$$

Preto odpoveď na otázku je

$$r = \frac{q\tilde{p}}{q - p + \tilde{p}}.$$

Podobne ako pri odhade J_1 potrebujeme rozanalyzovať, kedy je

$$I_2 \in \mathscr{L}(L^r, L^q)$$

pričom pre $p_1 \leq 2p_2$ položíme $p := p_1, \tilde{p} := p_2$ a pre $p_1 > 2p_2$ položíme $p := p_1, \tilde{p} < p_1/2$. Dostaneme záver, že $J_2 \leq C(||g||_{L^{p_1}_\delta} + ||g||_{L^{p_2}})$ ak je splnená jedna z nasledujúcich dvoch podmienok

$$\begin{aligned} p_1 \leq 2p_2 \text{ a súčasne } q(N - 2p_2) < Np_1, \\ 2p_2 < p_1 \text{ a súčasne } q(N - p_1) < Np_1. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ak platia vzťahy (2.13), (2.14) súčasne, tak lema je dokázaná. Podmienka (2.12) z lemy nám to práve zaručí. $\square$

3 Zmiešaná okrajová úloha

V tejto kapitole budeme študovať úlohu (1.5) s predpokladmi (1.6). Takou úlohou je typicky

$$\begin{aligned} -\Delta u &= v^p, \quad x \in \Omega, \\ -\Delta v + v &= u^q, \quad x \in \Omega, \\ u = \partial_\nu v &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Na základe predchádzajúcej kapitoly budeme hovoriť, že dvojica (u, v) je **veľmi slabým riešením** (neskôr len v.s. riešením) úlohy (1.5), ak $u, v \in L^1$ a platí:

(a) u je veľmi slabým L^1_δ-riešením úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta u = \hat{f}, &\qquad x \in \Omega, \\ u = 0, &\qquad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.2}$$

pre $\hat{f}(\cdot) := f(\cdot, v(\cdot))$.

(b) v je veľmi slabým L^1-riešením úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta v + v = \hat{g}, &\qquad x \in \Omega, \\ \partial_\nu v = 0, &\qquad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.3}$$

pre $\hat{g}(\cdot) := f(\cdot, u(\cdot))$.

3.1 „Bootstrap“ pre v.s. riešenia až do L^∞

V tejto podkapitole budeme predpokladať, že $1 < p, q < \infty$ a (u, v) je nezáporným v.s. riešením (1.5) pričom platia rastové predpoklady (1.6).

Veta 3.1. *Prepokladajme*

$$p < p_{sg} = N/(N-2), \qquad q(p(N-2)-2) < N,$$

potom

$$u, v \in L^\infty$$

a existuje konštanta $C = C(\Omega, p, q, \|v\|_{L^1(\Omega)}) > 0$ *taká, že*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

DÔKAZ. Budeme písať $w \in L^{k-}$ pre $k > 1$ ak pre každé $1 \leq \tilde{k} < k$ je $w \in L^{\tilde{k}}$ a $||w||_{L^{\tilde{k}}} \leq C$ pre konštantu $C = C(\Omega, p, q, \tilde{k}, \|v\|_{L^1(\Omega)}) > 0$.

Nech $\tilde{f} := f(\cdot, v(\cdot)), \tilde{g} := g(\cdot, u(\cdot))$. Vieme, z definície v.s. riešenia, že $\tilde{g} \in L^1$. Naviac, ak si zvolíme v tejto definícii testovaciu funkciu $\phi \equiv 1$, tak dostaneme

$$\|\tilde{g}\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega \tilde{g} \mathrm{d}x = \int_\Omega v \mathrm{d}x = \|v\|_{L^1(\Omega)}.$$

Stačí dokázať, že

$$\tilde{g} \in L^\theta \text{ pre nejaké } \theta > N/2. \tag{3.4}$$

Naozaj, pretože vtedy z Lemy 2.8 ($\hat{p} := \theta, \hat{q} := \infty$ na $\hat{p}, \hat{q}$ aplikujeme Lemu 2.8) dostaneme $v \in L^\infty$ a $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$. Potom z rastových predpokladov (1.6) je samozrejme $\tilde{f} \in L^\infty$ a teda znovu z Lemy 2.8 ($\hat{p} := N/2+1, \hat{q} := \infty$) dostaneme $u \in L^\infty$ a $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$.

Krok 1. Ukážeme, že $\tilde{g} \in L^{\tau-}$ pre

$$\tau := \begin{cases} \infty, & \text{ak } p \leq 2/(N-2), \\ \frac{N}{q[p(N-2)-2]}, & \text{ak } p > 2/(N-2) \end{cases}$$

pričom $\tau > 1$ z predpokladu vety.

Už sme ukázali, že $\tilde{g} \in L^1$ a $\|\tilde{g}\|_{L^1(\Omega)} \leq C$. Potom z Lemy 2.8 ($\hat{p} := 1$) dostaneme $v \in L^{\alpha-}$ pre

$$\alpha := \frac{N}{N-2}.$$

Potom z predpokladu máme $\alpha > p$ a teda (pričom $k-$ značí ľubovoľné číslo $\tilde{k} \in [1, k)$)

$$\int_\Omega \tilde{f}^{(\alpha/p)-} \mathrm{d}x \leq \int_\Omega (C(1+v^p))^{(\alpha/p)-} \mathrm{d}x \leq C(k) \left(\int_\Omega v^{\alpha-} \mathrm{d}x + 1 \right).$$

Z čoho $\tilde{f} \in L^{(\alpha/p)-}$, preto znovu z Lemy 2.8 ($\hat{p} := (\alpha/p)-$) dostaneme $u \in L^{\beta-}$ pre

$$\beta := \begin{cases} \infty, & \text{ak } p \leq 2/(N-2), \\ \frac{N}{p(N-2)-2}, & \text{ak } p > 2/(N-2). \end{cases}$$

Potom z (1.6) hneď dostaneme $\tilde{g} \in L^{\tau-}$.

Krok 2. Ukážeme, že ak $\tilde{g} \in L^{\omega-}$ pre $\omega \geq \tau$, tak $\tilde{g} \in L^{\hat{\omega}-}$, pre $\hat{\omega} := \omega\tau$.

Tento krok sa dokazuje analogicky, môžeme predpokladať, že $\tau \leq N/2$ (inak je splnený vzťah (3.4)). Z Lemy 2.8 ($\hat{p} := \omega$) dostaneme $v \in L^{\alpha-}$ pre

$$\alpha := \begin{cases} \infty, & \text{ak } \omega \geq N/2 \\ \frac{N\omega}{N-2\omega}, & \text{ak } \omega < N/2. \end{cases}$$

Potom z $\omega \geq \tau > 1$ máme $\alpha > p$ a teda z rastových predpokladov (1.6) je $\tilde{f} \in L^{(\alpha/p)-}$. Preto znovu z Lemy 2.8 ($\hat{p} := (\alpha/p)-$) dostaneme $u \in L^{\beta-}$ pre

$$\beta := \begin{cases} \infty, & \text{ak } \alpha \geq Np/2, \\ \frac{N\alpha}{Np-2\alpha}, & \text{ak } \alpha < Np/2. \end{cases}$$

Potom, je buď $\beta = \infty$ a teda $\beta > q$, alebo$\beta < \infty$ a vtedy

$$\beta = \frac{N\omega}{p(N-2\omega)-2} > \frac{N}{p(N-2)-2} = q\tau > q.$$

Preto z (1.6) hneď dostaneme $\tilde{g} \in L^{(\beta/q)-}$. Stačí dokázať, že $\beta/q \geq \hat{\omega}$. Ale to naozaj platí:

$$\frac{\beta}{q} = \frac{N\omega}{q[p(N-2\omega)-2]} > \omega\frac{N}{q[p(N-2)-2]} = \omega\tau = \hat{\omega}.$$

Krok 3. Konečnou iteráciou kroku 2 (za ω vždy dosadíme $\hat{\omega}$) dostaneme, že je splnená podmienka (3.4) a tým je dôkaz ukončený. $\square$

Poznámka 3.1. Môžeme povedať, že v predchádzajúcom dôkaze predpoklady Vety 3.1 slúžili na to, aby sme cyklus tvrdení

$$\cdots \to \tilde{g} \in L^{\omega-} \xrightarrow{\text{Lema 2.8}} v \in L^{\alpha-} \xrightarrow{(1.6)} \tilde{f} \in L^{(\alpha/p)-} \xrightarrow{\text{Lema 2.8}} u \in L^{\beta-} \xrightarrow{(1.6)} \tilde{g} \in L^{\hat{\omega}-} \to \cdots$$

mohli inicializovať (teda nejako rozumne odštartovať, to sme robili v prvom kroku dôkazu) a „zacykliť“ (druhý krok dôkazu). Tento postup sa nazýva v literatúre *bootstrap* alebo tiež *alternate-bootstrap* metóda (viď [1, 2, 13, 14]).

Definujme funkciu

$$\mathcal{Q} : \left[p_{sg}, \frac{N+1}{N-3}\right) \to (1, p_{BT}]$$

nasledovne (pre definíciu p_{BT}, p_{sg} pozri Vetu 1.1; pre $N = 3$ chápeme $\frac{N+1}{N-3} := \infty$)

$$\mathcal{Q}(p) := \begin{cases} \frac{N(N+1)}{(N-1)(N-2)p}, & \text{ak } p \in [p_{sg}, \frac{N+1}{N-2}], \\ \frac{N+1+2p}{(N-1)p}, & \text{ak } p \in (\frac{N+1}{N-2}, \frac{N+1}{N-3}) \end{cases}$$

a hneď si uvedomme, že $\mathcal{Q}$ je rýdzo klesajúca funkcia, preto existuje inverzia

$$\mathcal{Q}^{-1} : (1, p_{BT}] \to \left[p_{sg}, \frac{N+1}{N-3}\right),$$

jej predpis je

$$\mathcal{Q}^{-1}(q) := \begin{cases} \frac{N(N+1)}{(N-1)(N-2)q}, & \text{ak } q \in [\frac{N}{N-1}, p_{BT}], \\ \frac{N+1}{(N-1)q-2}, & \text{ak } q \in (1, \frac{N}{N-1}). \end{cases}$$

Veta 3.2. *Prepokladajme že*

$$p \geq p_{sg}, \qquad q < \mathcal{Q}(p),$$

potom platí rovnaký záver ako vo Vete 3.1 až na to, že konštanta C závisí aj od $\|u\|_{L^1_\delta(\Omega)}$.

Dôkaz. Tak, ako v dôkaze Vety 3.1, píšeme $w \in L^{k-}$ (resp. $w \in L^{k-}_\delta$) pre $k > 1$ ak pre každé $1 \leq \tilde{k} < k$ je $w \in L^{\tilde{k}}$ (resp. $w \in L^{\tilde{k}}_\delta$) a $||w||_{L^{\tilde{k}}} \leq C$ (resp. $||w||_{L^{\tilde{k}}_\delta} \leq C$) pre konštantu $C = C(\Omega, p, q, \tilde{k}, \|u\|_{L^1_\delta(\Omega)}, \|v\|_{L^1(\Omega)}) > 0$.

Ďalej označme $\tilde{f} := f(\cdot, v(\cdot)), \tilde{g} := g(\cdot, u(\cdot))$. Vieme z definície, že $\tilde{f} \in L^1_\delta$ a $\tilde{g} \in L^1$. Ako v dôkaze Vety 3.1 dostaneme $\|\tilde{g}\|_{L^1(\Omega)} = \|v\|_{L^1(\Omega)}$ a z definície v.s. riešenia, voľbou za testovaciu funkciu $\phi = \varphi_1$ použitím (1.1) dostaneme

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{L^1_\delta(\Omega)} &= \int_\Omega f\delta \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega f\varphi_1 \mathrm{d}x = C \int_\Omega u(-\Delta\varphi_1)\mathrm{d}x = \\ &= C\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega u\delta \mathrm{d}x = C\|u\|_{L^1_\delta(\Omega)}. \end{aligned}$$

Stačí dokázať, že

$$\tilde{f} \in L^\theta_\delta \text{ pre nejaké } \theta > (N+1)/2. \tag{3.5}$$

Naozaj, pretože vtedy z Lemy 2.7 ($\hat{p} := \theta, \hat{q} := \infty$) dostaneme $u \in L^\infty$ a $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$. Z rastových predpokladov (1.6) je samozrejme $\tilde{g} \in L^\infty$ a teda z Lemy 2.8 ($\hat{p} := N/2+1, \hat{q} := \infty$) dostaneme $v \in L^\infty$ a $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$.

Krok 1. Ukážeme, že $\tilde{f} \in L^{\tau-}_\delta$ pre $\tau := \mathcal{Q}^{-1}(q)/p > 1$.

Pretože

$$1 < q < \mathcal{Q}(p) \leq \mathcal{Q}(\frac{N}{N-2}) = \frac{N+1}{N-1}, \tag{3.6}$$

je $\mathcal{Q}^{-1}(q)$ dobre definované.

Vieme, že $\tilde{f} \in L^1_\delta$ preto z Liem 2.7, 2.6 (pri $\hat{p} := 1$) dostaneme

$$u \in L^{\alpha-}_\delta, \text{ pre } \alpha := \frac{N+1}{N-1},$$
$$u \in L^{\beta-}, \text{ pre } \beta := \frac{N}{N-1}$$

a teda $u \in L_\delta^{\alpha-} \cap L^{\beta-}$. Z (3.6) je $\alpha > q$, ale $\beta > q$ všeobecne nemusí nastať, preto musíme ošetriť prípady $q \in [1, \beta)$ a $q \in [\beta, \alpha)$ zvlášť.

Nech je najprv $q \in [\beta, \alpha)$. Potom z rastového predpokladu (1.6) a z toho, že $\tilde{g} \in L^1$ dostaneme

$$\tilde{g} \in L_\delta^{(\alpha/q)-} \cap L^1.$$

Potom z Lemy 2.10 ($\hat{p}_1 := (\alpha/q)-, \hat{p}_2 := 1$ z troch alternatív v (2.12) nastane práve prvá) dostaneme

$$v \in L_\delta^{\gamma-}, \text{ pre } \gamma := \frac{N\alpha}{q(N-2)}.$$

Potom

$$\gamma = \frac{N(N+1)}{(N-1)(N-2)q} = \mathcal{Q}^{-1}(q) > p.$$

Preto z (1.6) v tomto prípade dostaneme $\tilde{f} \in L_\delta^{(\gamma/p)-} = L_\delta^{\tau-}$.

Nech je $q \in [1, \beta)$. Potom z (1.6) dostaneme

$$\tilde{g} \in L_\delta^{(\alpha/q)-} \cap L^{(\beta/q)-}.$$

Použitím Lemy 2.10 ($\hat{p}_1 := (\alpha/q)-, \hat{p}_2 := (\beta/q)-$, z troch alternatív v (2.12) znovu nastane prvá) máme $v \in L_\delta^{\gamma-}$, pre

$$\gamma := \begin{cases} \infty, & \text{ak } \beta \geq Nq/2, \\ \frac{N\alpha}{Nq-2\beta}, & \text{ak } \beta < Nq/2. \end{cases}$$

Ak $\gamma < \infty$ tak dosadením

$$\gamma = \frac{N+1}{(N-1)q-2} = \mathcal{Q}^{-1}(q) > p.$$

Preto aj v tomto prípde dostaneme z rastového predpokladu (1.6), že $\tilde{f} \in L_\delta^{(\gamma/p)-} = L_\delta^{\tau-}$.

Krok 2. Ukážeme, že ak $\tilde{f} \in L_\delta^{\omega-}$ pre $\omega \geq \tau$, tak $\tilde{f} \in L_\delta^{\hat{\omega}-}$, pre $\hat{\omega} := \omega\tau$.

Môžme predpokladať, že $\omega \leq (N+1)/2$, ináč dostaneme (3.5). Vieme, že $\tilde{f} \in L_\delta^{\omega-}$ preto z Liem 2.7, 2.6 (pri $\hat{p} := \omega-$) dostaneme $u \in L_\delta^{\alpha-} \cap L^{\beta-}$ pre

$$\alpha := \begin{cases} \infty, & \text{ak } (N+1)/2 \leq \omega, \\ \frac{(N+1)\omega}{N+1-2\omega}, & \text{ak } (N+1)/2 > \omega, \end{cases} \qquad \beta := \begin{cases} \infty, & \text{ak } (N+1)/2 \leq \omega, \\ \frac{N\omega}{N+1-2\omega}, & \text{ak } (N+1)/2 > \omega, \end{cases}$$

Vidíme, že $\alpha = \frac{N+1}{N}\beta$. Tiež máme $\alpha > \frac{N+1}{N-1} > q$ a preto môžu nastať dve možnosti, buď $q < \beta < \alpha$, alebo $\beta \leq q < \alpha$.

Nech najprv $\beta \leq q < \alpha$. Potom z rastového predpokladu (1.6) máme

$$\tilde{g} \in L_\delta^{(\alpha/q)-} \cap L^1.$$

Použime Lemu 2.10 pre $\hat{p}_1 := (\alpha/q)-, \hat{p}_2 := 1$. Pretože

$$\hat{p}_1 = \frac{\alpha-}{q} = \frac{(N+1)\beta-}{Nq} \leq \frac{N+1}{N} = \frac{(N+1)\hat{p}_2}{N}$$

nastane prvý prípad v (2.12). Potom $v \in L_\delta^{\gamma-}$ pre

$$\gamma := \frac{N\alpha}{q(N-2)}.$$

Potom alebo $\gamma = \infty$ a vtedy $\gamma > p\tau\omega$, alebo $\gamma < \infty$ a vtedy tiež (využitím toho, že $N/(N-1) < \beta \leq q$) dostaneme

$$\gamma = \frac{N(N+1)\omega}{q(N-2)(N+1-2)\omega} > p\omega\frac{N(N+1)}{pq(N-2)(N-1)} = p\omega\mathcal{Q}^{-1}(q)/p = p\tau\omega.$$

Preto z (1.6) máme $\tilde{f} \in L_\delta^{\hat{\omega}-}$.

Ak je zase $q < \beta < \alpha$, tak z rastového predpokladu (1.6) dostaneme

$$\tilde{g} \in L_\delta^{(\alpha/q)-} \cap L^{(\beta/q)-}.$$

Znovu nastane prvý prípad v (2.12) v Leme 2.10 pre $\hat{p}_1 := (\alpha/q)-, \hat{p}_2 := (\beta/q)-$, pretože

$$\hat{p}_1 = \frac{\alpha-}{q} = \frac{(N+1)\beta-}{Nq} = \frac{(N+1)\hat{p}_2}{N}.$$

Potom $v \in L_\delta^{\gamma-}$ pre

$$\gamma := \begin{cases} \infty, & \text{ak } \beta \geq Nq/2, \\ \frac{N\alpha}{Nq-2\beta}, & \text{ak } \beta < Nq/2. \end{cases}$$

Sú dve možnosti, buď nastane $\gamma = \infty$ a vtedy $\gamma > p\tau\omega$, alebo $\gamma < \infty$ a treba analyzovať ďalej. Ak platí naviac $q \leq N/(N-1)$ tak

$$\gamma = \omega\frac{N+1}{q(N+1-2\omega)-2\omega} > p\omega\frac{N+1}{p[q(N-1)-2]} = p\omega\tau.$$

Ak je na druhej strane $q > N/(N-1)$, tak využitím nerovnosti

$$\omega > \frac{q(N+1)}{N+2q},$$

ktorú máme z predpokladu $q < \beta$, dostaneme

$$\gamma = \omega\frac{N+1}{q(N+1-2\omega)-2\omega} > p\omega\frac{N+2q}{pq(N-2)} > p\omega\tau$$

pričom posledná nerovnosť vyplýva z toho, že v prípade $q > N/(N-1)$ je

$$\frac{N+2q}{q(N-2)} > \mathcal{Q}^{-1}(q).$$

Vo všetkých prípadoch máme $\gamma > p\tau\omega = p\hat{\omega}$. Preto z rastového predpokladu (1.6) dostávame tvrdenie $\tilde{f} \in L_\delta^{\hat{\omega}-}$.

Krok 3. Konečnou iteráciou kroku 2 (za ω vždy dosadíme $\hat{\omega}$) dostaneme, že je splnená podmienka (3.5) a tým je dôkaz ukončený. □

Poznámka 3.2. V duchu Poznámky 3.1 predpoklady Vety 3.2 slúžili na inicializáciu a zacyklenie cyklusu:

$$\begin{aligned}\cdots \to \tilde{f} \in L_\delta^{\omega-} &\xrightarrow{\text{Lemy 2.7,2.6}} u \in L_\delta^{\alpha-} \cap L^{\beta-} \xrightarrow{(1.6)} \tilde{g} \in L_\delta^{(\alpha/q)-} \cap L^{\max\{1,\beta/q\}} \\ &\xrightarrow{\text{Lema 2.10}} v \in L_\delta^{\gamma-} \xrightarrow{(1.6)} \tilde{f} \in L_\delta^{\hat{\omega}-} \to \cdots .\end{aligned}$$

Poznámka 3.3. Ak si dodefinujeme

$$\mathcal{Q}(p) := \begin{cases} \infty, & \text{ak } 1 < p \leq \frac{2}{N-2}, \\ \frac{N}{p(N-2)-2}, & \text{ak } \frac{2}{N-2} < p < \frac{N}{N-2}, \end{cases}$$

tak Vety 3.1, 3.2 môžeme vysloviť spoločne tak, že za predpokladu $q < \mathcal{Q}(p)$ platia závery spomínaných viet.

Poznámka 3.4. Lineárna teória, ktorú sme vybudovali v kapitole 2 pre $N \geq 3$ sa dá urobiť aj pre $N \leq 2$. V týchto rozmeroch sa zmodifikuje Greenova funkcia a teda aj jej odhad typu (2.7). Principiálne rovnakými úvahami dostaneme, že Lema 2.7 platí aj v týchto prípadoch.

Ukáže sa, že pre $N \leq 2$ platí Veta 3.1 bez obmedzujúceho predpokladu na parametre p, q. Naozaj, lebo ako na začiatku Vety 3.1 dostaneme $\|\tilde{g}\|_{L^1(\Omega)} = \|v\|_{L^1(\Omega)}$ a z toho použitím Lemy 2.8 máme $v \in L^{k-}$ pre $k < \infty$ (zápis $h \in L^{k-}$ používame ako vo Vete 3.1). Keď si zvolíme $k > Np/2$, tak z rastových podmienok je $\tilde{f} \in L^{(k/p)-}$ a potom z Lemy 2.8 plynie $u \in L^\infty$ a $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$. Potom z rastových podmienok a použitím Lemy 2.8 už ľahko dostaneme $v \in L^\infty$ a $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$.

Poznámka 3.5. Vety 3.1,3.2 hovoria o tom, kedy sú v.s riešenia ohraničené. Ohraničenosť riešení implikuje ohraničenosť pravých strán, preto tieto riešenia v skutočnosti majú oveľa vyššiu regularitu, pre podrobnosti viď [1].

3.2 Optimalita

Teraz sa budeme venovať otázke, či sú výsledky podkapitoly 3.1 optimálne v zmysle Vety 1.2. Presnejšie, pre každé $q > \mathcal{Q}(p)$ chceme príklad funkcií $f, g \in \mathrm{Car}(\Omega, \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$, takých že

(i) spĺňajú rastové predpoklady (1.6)

(ii) existuje nezáporné v.s. riešenie (u, v) úlohy (1.5) také, že $u, v \notin L^\infty$.

Takto naformulovaný cieľ úplne splniť nevieme (a naša intuícia podopretá aj výsledkami podkapitoly 3.4 je, že sa to ani nedá splniť), ale ukážeme, že výsledky Viet 3.1,3.2 sú predsa len optimálne v prípade, keď $p \notin [p_{sg}, p^*)$, kde

$$p^* := (N+1)/(N-2).$$

Jednoduchým rátaním sa dopracujeme k tomu, že pre optimálne výsledky (pozri Vetu 1.2) úloh $(1.5)_D, (1.5)_N$ máme

$$\max\{\alpha, \beta\} > N - 1 \Leftrightarrow q < q_d^*(p), \quad \max\{\alpha, \beta\} > N - 2 \Leftrightarrow q < q_n^*(p),$$

kde

$$q_d^*(p) := \begin{cases} \frac{N+1}{p(N-1)-2}, & \text{ak } 1 < p < p_{BT}, \\ \frac{N+1+2p}{p(N-1)}, & \text{ak } p \geq p_{BT}, \end{cases} \qquad q_n^*(p) := \begin{cases} \frac{N}{p(N-2)-2}, & \text{ak } 1 < p < p_{sg}, \\ \frac{N+2p}{p(N-2)}, & \text{ak } p \geq p_{sg} \end{cases}$$

pričom hodnoty zlomkov, tu a aj neskôr, definujeme ako ∞ pre nekladné menovatele.

Zoberme si nasledujúcu krivku, ktorá bude kľúčová pre našu otázku

$$\mathcal{Q}^*(p) := \begin{cases} q_n^*(p), & \text{ak } 1 < p < p_{sg}, \\ \frac{N}{p(N-2)-2}, & \text{ak } p_{sg} \leq p < p^*, \\ q_d^*(p), & \text{ak } p \geq p^*. \end{cases}$$

Uvedomme si, že $\mathcal{Q} \leq \mathcal{Q}^*$ pričom ostrá nerovnosť nastane práve na „kritickom“ intervale

$$[p_{sg}, p^*)\,.$$

Nasledujúca veta rieši cieľ tejto podkapitoly.

Veta 3.3. *Ak $q > \mathcal{Q}^*(p)$, potom existujú nezáporné funkcie $f, g \in \mathrm{Car}(\Omega, \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$, ktoré spĺňajú rastové predpoklady (1.6) a pritom úloha (1.5) má také kladné v.s. riešenie (u, v), že*

$$u, v \notin L^\infty.$$

DÔKAZ. Dokazujeme analogicky, ako v článku [3]. Koreňom dôkazu sú dolné odhady z (2.7),(2.8).

Krok 1. Zjednodušujúce predpoklady, bez ujmy na všeobecnosť.

Môžeme predpokladať, že $0 \in \partial\Omega$. Ďalej, ako v [3] tiež môžeme predpokladať, že existujú $\theta, R > 0$ dostatočne malé také, že pre rotačný kužeľ

$$\Sigma_1 := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \quad | \quad \sqrt{\sum_{i=2}^{N} x_i^2} \leq \theta x_1 \right\}$$

je $\Sigma := \Sigma_1 \cap B(0,R) \subset \Omega \cup \{0\}$ a existuje konštanta $C^* > 0$ taká, že pre každé $x \in \Sigma$ je

$$C^*|x| \leq \delta(x) \leq |x|, \tag{3.7}$$

pozri obrázok 2 (pričom na obrázku je $x' = (x_2, x_3, \dots, x_N)$).

Funkcie f, g budeme hľadať v tvare

$$f(x,s) := a(x)s^p, \qquad g(x,s) := b(x)s^q$$

pričom $a, b \in L^\infty$. Takéto funkcie vyhovujú rastovým predpokladom (1.6).

Krok 2. Ukážeme, že pre vhodné pravé strany ϕ, ψ majú lineárne úlohy (2.1), (2.2) také veľmi slabé riešenia, ktoré neležia v L^∞.

Položme

$$\phi(x) := |x|^{-(\alpha+2)}\chi_\Sigma(x) \text{ a } \psi(x) := |x|^{-(\beta+2)}\chi_\Sigma(x),$$

kde χ_Σ je charakteristická funkcia množiny Σ a $\alpha, \beta > -2$. Potom pre

$$\alpha < N-1, \qquad \beta < N-2 \tag{3.8}$$

je $\phi \in L^1_\delta$ a $\psi \in L^1$. Z podkapitoly 2.4 máme, že U, V dané vzťahmi

$$U(x) = \int_\Omega \mathcal{G}(x,y)\phi(y)\mathrm{d}y, \quad V(x) = \int_\Omega \mathcal{N}(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y.$$

sú v.s. riešenia úloh (2.1), (2.2) s pravými stranami ϕ a ψ.

Zvoľme si pevne $x \in \Sigma \setminus \{0\}$ a nech $r := |x|$. V ďalšom symbolom C chápeme kladnú konštantu, ktorá sa môže meniť v priebehu dôkazu, ale nezávisí na x.

Z dolného odhadu v (2.7)

$$\begin{aligned} U(x) &= \int_\Omega \mathcal{G}(x,y)\phi(y)\mathrm{d}y = \int_\Sigma \mathcal{G}(x,y)|y|^{-(\alpha+2)}\mathrm{d}y \\ &\geq C\int_\Sigma \min\left\{1, \frac{\delta(x)\delta(y)}{|x-y|^2}\right\}|x-y|^{2-N}|y|^{-(\alpha+2)}\mathrm{d}y \\ &\geq C\int_{B(x,r/2)\cap\Sigma} \min\left\{1, \frac{\delta(x)\delta(y)}{|x-y|^2}\right\}|x-y|^{2-N}|y|^{-(\alpha+2)}\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

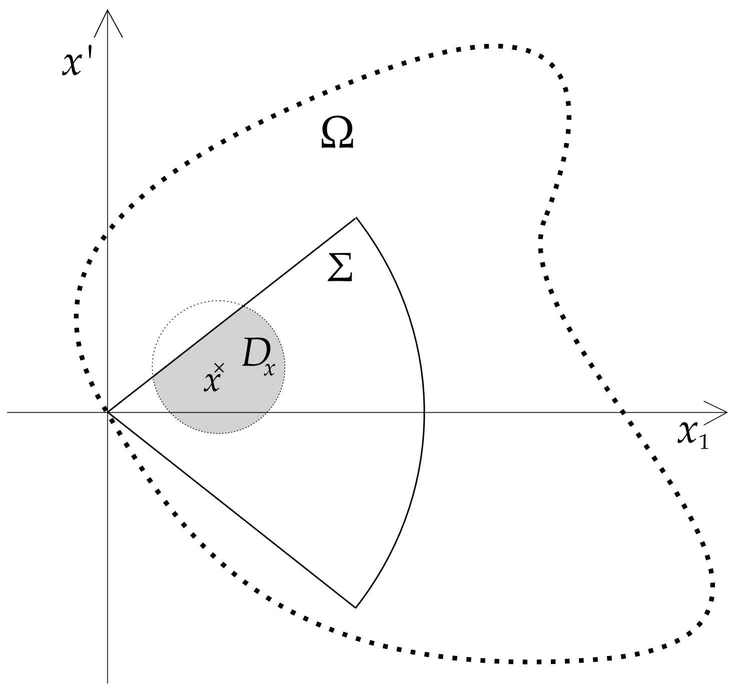
Zo štruktúry gule $B(x, r/2)$ a z odhadu (3.7) ľahko dostaneme pre každé $y \in B(x, r/2) \cap \Sigma$

$$\delta(x) \geq C^* r, \quad |x-y| \leq \frac{1}{2} r, \quad \delta(y) \geq C^*|y| \geq C^*(|x| - |y-x|) \geq \frac{C^*}{2} r,$$
$$|y| \leq |x| + |y-x| \leq \frac{3}{2} r.$$

Preto, ak si označíme $D_x := B(x, r/2) \cap \Sigma$, tak

$$\begin{aligned} U(x) &\geq C \int_{D_x} \min\left\{1, \frac{C^* r C^* r/2}{r^2/4}\right\} (r/2)^{2-N} (3r/2)^{-(\alpha+2)} \mathrm{d}y = \\ &= C \int_{D_x} r^{-\alpha-N} \mathrm{d}y = C r^{-\alpha-N} |D_x| \geq C r^{-\alpha}., \end{aligned}$$

kde sme použili dolný odhad $|D_x| \geq C r^N$, ktorý je intuitívne jasný a dokáže sa jednoduchými úvahami.



Obr. 2: Rotačný kužeľ v Ω

Rovnako dostaneme pre $x \in \Sigma \setminus \{0\}$ z dolného odhadu v (2.8) $V(x) \geq C|x|^{-\beta}$. Spolu máme pre $x \in \Omega$

$$U(x) \geq C|x|^{-\alpha} \chi_\Sigma, \quad V(x) \geq C|x|^{-\beta} \chi_\Sigma.$$

Krok 3. Konštrukcia funkcií a, b pomocou ϕ, ψ, U, V.

Ak predpokladáme, že $p\beta = \alpha + 2$ a $q\alpha = \beta + 2$, tak

$$\begin{aligned}(V(x))^p &\geq C|x|^{-p\beta}\chi_\Sigma = C|x|^{-(\alpha+2)}\chi_\Sigma = C\phi,\\ (U(x))^q &\geq C|x|^{-q\alpha}\chi_\Sigma = C|x|^{-(\beta+2)}\chi_\Sigma = C\psi.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Tieto predpoklady a (3.8) dávajú podmienky

$$N - 1 > \alpha = \frac{2(p+1)}{pq-1}, \quad N - 2 > \beta = \frac{2(q+1)}{pq-1},$$

ktoré sú splnené práve za predpokladu $q > \mathcal{Q}^*(p)$. Položme $a := \phi/V^p, b := \psi/U^q$. Tieto funkcie sú dobre definované, pretože dolné odhady funkcií $\mathcal{G}, \mathcal{N}$ implikujú $U, V > 0$. Naviac (3.9) dáva $a, b \in L^\infty$. Preto $u := U, v := V$ sú veľmi slabé riešenia úlohy

$$\begin{aligned}-\Delta u &= av^p, \quad x \in \Omega,\\ -\Delta v + v &= bu^q, \quad x \in \Omega,\\ u = \partial_\nu v &= 0, \quad\ \ x \in \partial\Omega,\end{aligned} \tag{3.10}$$

ale $u, v \notin L^\infty$. □

Poznámka 3.6. Všimnime si, že

$$q > \mathcal{Q}^*(p) \Leftrightarrow \max\{\alpha - N + 1, \beta - N + 2\} > 0,$$

čo sa veľmi podobá na optimálne vzťahy vo Vete 1.2, čo podporuje našu hypotézu, že optimálnou krivkou pre našu úlohu je $\mathcal{Q}^*$ a nie $\mathcal{Q}$.

Uvedomme si, že v dôkaze Vety 3.3 dostaneme „zadarmo“ nejednoznačnosť v.s. riešenia úlohy (3.10), pretože $(\hat{u}, \hat{v}) \equiv (0, 0)$ je tiež v.s. riešením tejto úlohy.

3.3 Apriórne odhady nezáporných v.s. riešení

V ďalšom budeme hľadať také podmienky na p, q, aby všetky veľmi slabé nezáporné riešenia úlohy (1.5) s rastovými predpokladmi (1.6) ležali v L^∞ a spĺňovali **apriórny** odhad

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \tag{3.11}$$

kde konštanta $C > 0$ nezávisí od dvojice (u, v).

Vzhľadom na výsledky Viet 3.1,3.2 dostaneme, že stačí odhadnúť $\|u\|_{L^1_\delta(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\Omega)}$ nezávisle od (u, v) (takéto úvahy pre úlohu $(1.5)_D$ sú v [1, Section 3.]).

Budeme potrebovať nasledujúci jednoduchý fakt z elementárnej analýzy.

Lema 3.1. *Nech $f(x) = ax^A, g(x) = bx$, kde $a, A, b > 0$. Potom:*

(a) Ak $A > 1$, tak existuje $C > 0$ také, že pre každé $x \geq 0$ platí:

$$f(x) \geq g(x) - C.$$

(b) Ak $A < 1$, tak existuje $C > 0$ také, že pre každé $x \geq 0$ platí:

$$f(x) \leq g(x) + C.$$

Veta 3.4. *Nech je $p_1 > 2, q_1 > 1$ a funkcie f, g spĺňajú podmienky superlinearity*

$$f(x,v) \geq C_1 v^{p_1} - C_2, \qquad g(x,u) \geq C_1 u^{q_1} - C_2 \tag{3.12}$$

pre s.v. $x \in \Omega$ pre každé $u, v \in \mathbb{R}^+$, kde $C_1, C_2 > 0$ sú konštanty. Potom existuje konštanta $C > 0$ taká, že veľmi slabé nezáporné riešenia (u,v) systému (1.5) spĺňajú

$$\|u\|_{L^1_\delta(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\Omega)} \leq C. \tag{3.13}$$

DÔKAZ. Nech (u,v) sú nezáporné v.s. riešenia úlohy (1.5). Označme $\tilde{f} := f(\cdot, v(\cdot)), \tilde{g} := g(\cdot, u(\cdot))$. Z definície veľmi slabého riešenia pre vhodné testovacie funkcie (viď začiatok dôkazov Viet 3.1,3.2) dostaneme

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \mathrm{d}x = \int_\Omega \tilde{f}\varphi_1 \mathrm{d}x \tag{3.14}$$

$$\int_\Omega v \mathrm{d}x = \int_\Omega \tilde{g} \mathrm{d}x. \tag{3.15}$$

Sčítaním týchto rovníc máme

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \mathrm{d}x + \int_\Omega v \mathrm{d}x = \int_\Omega \tilde{f}\varphi_1 \mathrm{d}x + \int_\Omega \tilde{g} \mathrm{d}x. \tag{3.16}$$

Pužitím (3.12) a z Hölderovej nerovnosti máme odhady

$$\begin{gathered}\int_\Omega \tilde{g} \mathrm{d}x \geq C_1 \int_\Omega u^{q_1} \mathrm{d}x - \int_\Omega C_2 \mathrm{d}x \geq C_3 \int_\Omega (u\varphi_1)^{q_1} \mathrm{d}x - C_4 \geq C_5 \left(\int_\Omega u\varphi_1 \mathrm{d}x \right)^{q_1} - C_4, \\ \int_\Omega \tilde{f}\varphi_1 \mathrm{d}x \geq C_1 \int_\Omega v^{p_1}\varphi_1 \mathrm{d}x - C_6,\end{gathered} \tag{3.17}$$

kde

$$C_3 = C_1(\max_\Omega \varphi_1)^{-q_1} > 0, \quad C_4 := C_2|\Omega| > 0, \quad C_5 = C_3|\Omega|^{1-q_1} > 0, \quad C_6 = C_2 \int_\Omega \varphi_1 \mathrm{d}x > 0.$$

Tiež máme

$$\int_\Omega v\mathrm{d}x = \int_\Omega v\varphi_1^a\varphi_1^{-a}\mathrm{d}x \le \left(\int_\Omega v^{\frac{1}{a}}\varphi_1\mathrm{d}x\right)^a \left(\int_\Omega \varphi_1^{-\frac{a}{1-a}}\mathrm{d}x\right)^{1-a}. \tag{3.18}$$

Ak predpokladáme, že $a < \frac{1}{2}$, tak

$$\frac{a}{1-a} < 1$$

a potom z toho, že $\varphi_1 \ge c^*\delta$, pre vhodnú konštantu $c^* > 0$ (viď (1.1)), dostaneme

$$\left(\int_\Omega \varphi_1^{-\frac{a}{1-a}}\mathrm{d}x\right)^{1-a} < \infty.$$

Ak položíme $a := \frac{1}{p_1}$, tak predpoklad vety $p_1 > 2$ nám zaručí podmienku $a < \frac{1}{2}$. Použitím (3.17),(3.18) v (3.16) máme:

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1\mathrm{d}x + C_7\left(\int_\Omega v^{p_1}\varphi_1\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_1}} \ge C_1\int_\Omega v^{p_1}\varphi_1\mathrm{d}x + C_5\left(\int_\Omega u\varphi_1\mathrm{d}x\right)^{q_1} - C_4 - C_6 \tag{3.19}$$

kde

$$0 < C_7 := \left(\int_\Omega \varphi_1^{-\frac{1}{p_1-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_1-1}{p_1}} < \infty.$$

Z Lemy 3.1 máme, že existujú kladné konštanty C_8, C_9 s vlastnosťou

$$C_7 t^{1/p_1} \le C_1 t + C_8, \quad C_5 t^{q_1} \ge (\lambda_1+1)t - C_9, \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

Ak v prvej nerovnosti položíme $t := \int_\Omega v^{p_1}\varphi_1\mathrm{d}x$ a v druhej $t := \int_\Omega u\varphi_1\mathrm{d}x$ tak (3.19) sa redukuje na

$$C_{10} \ge \int_\Omega u\varphi_1\mathrm{d}x,$$

kde $C_{10} = C_4 + C_6 + C_8 + C_9 > 0$. Potom

$$\|u\|_{L^1_\delta(\Omega)} \le C_{11} := C_{10}/c^*,$$

a z (3.18),(3.12) a (3.14) máme druhý odhad

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\mathrm{d}x &\le C_7\left(\int_\Omega v^{p_1}\varphi_1\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_1}} \le C_7\left(\int_\Omega \frac{1}{C_1}(\tilde{f}+C_2)\varphi_1\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_1}} \le \\ &\le C_7\left(\frac{\lambda_1}{C_1}\int_\Omega u\varphi_1\mathrm{d}x + \frac{C_2}{C_1}\int_\Omega \varphi_1\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_1}} \le C_7\left(\frac{C_{10}\lambda_1}{C_1} + \frac{C_2}{C_1}\int_\Omega \varphi_1\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_1}} := C_{12}.\end{aligned}$$

Konštanty C_{11}, C_{12} nezávisia od dvojice (u, v), preto pri $C := C_{11} + C_{12}$ máme vetu dokázanú. □

Poznámka 3.7. Uvedomme si, že za predpokladu (1.6), (3.12) s parametrami $p \geq p_1 > 2, 1 < q_1 \leq q < \mathcal{Q}(p)$ platia závery Viet 3.1,3.2 s konštantou $C > 0$, ktorá už na základe Vety 3.4 nezávisí od dvojice (u, v) (teda už nezávisia ani od noriem $\|u\|_{L^1_\delta(\Omega)}, \|v\|_{L^1(\Omega)}$.) Preto vtedy platí apriórny odhad (3.11).

Lema 3.2. *Majme rovnaké predpoklady ako vo Vete 3.4. Potom pre $\eta > 0$ dostatočne veľké neexistuje nezáporné v.s. riešenie úlohy*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x,v) + \eta, & x \in \Omega, \\ -\Delta v + v &= g(x,u), & x \in \Omega, \\ u = \partial_\nu v &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dôkaz. Táto lema je vlastne svojím spôsobom dôsledkom Vety 3.4, dôkaz je analogický. Predpokladajme, že daná úloha má nezáporné v.s. riešenie (u, v). Dopracujeme sa ku sporu.

Analógia vzťahu (3.16) je

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi_1 \mathrm{d}x = \int_\Omega \tilde{f}\varphi_1 \mathrm{d}x + \int_\Omega \tilde{g} \mathrm{d}x + \eta \int_\Omega \varphi_1 \mathrm{d}x.$$

Presne ako v dôkaze spomínanej vety, dostaneme

$$C_{10} \geq \int_\Omega u\varphi_1 \mathrm{d}x + \eta \int_\Omega \varphi_1 \mathrm{d}x.$$

Tento vzťah však dáva, že pre

$$\eta > \frac{C_{10}}{\int_\Omega \varphi_1 \mathrm{d}x}$$

je $\int_\Omega u\varphi_1 \mathrm{d}x < 0$ čo je spor. □

3.4 Apriórne odhady na kritickej množine

V tejto podkapitole budeme pracovať na nasledujúcej kritickej množine (pozri podkapitolu 3.2 parametrov

$$\mathcal{K} := \{(p, q) \quad | \quad p_{sg} \leq p < p^*, \quad \mathcal{Q}(p) \leq q < \mathcal{Q}^*(p)\}.$$

Nasledujúca veta je podobná Vetám 3.1,3.2, avšak nie je v nej dokázané, že veľmi slabé riešenia sú ohraničené, ale pracuje sa rovno len s ohraničenými riešeniami.

Veta 3.5. *Nech $(p, q) \in \mathcal{K}$. Majme ohraničené nezáporne v.s. riešenie (u, v) úlohy* (1.5) *s rastovými predpokladmi* (1.6). *Potom*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$$

pre konštantu $C > 0$, ktorá závisí iba od normy $\|v\|_{L^1(\Omega)}$.

DÔKAZ. Nech (u, v) je ohraničené nezáporné v.s. riešenie úlohy (1.5). Položme $\tilde{f} := f(\cdot, v(\cdot)), \tilde{g} := g(\cdot, u(\cdot))$ a tiež $M := \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Vzhľadom na to čo chceme dokázať, môžeme predpokladať, že $M > 1$. Symbolom C budeme označovať kladnú konštantu, ktorá sa môže meniť v priebehu dôkazu ale len v závislosti od parametrov úlohy alebo normy $\|v\|_{L^1(\Omega)}$.

Prvý prípad. Prepokladajme naviac $q \geq \frac{2}{N-2}$. Z predpokladov na p, q plynie, že si dokážeme zvoliť $z \geq 1$ a $r \in (1, \frac{N}{N-2})$ tak, že

$$\frac{qN}{2(q+1)} \leq z < \frac{rq}{pq-1}. \tag{3.20}$$

Naozaj, z dodatočného predpokladu $q \geq \frac{2}{N-2}$ máme $1 \leq \frac{qN}{2(q+1)}$ preto stačí ukázať, že vieme zvoliť $r \in (1, \frac{N}{N-2})$ také, že $\frac{qN}{2(q+1)} < \frac{rq}{pq-1}$. Toto však vieme zabezpečiť ak r je dostatočne blízko ku $\frac{N}{N-2}$ pretože

$$\frac{qN}{2(q+1)} < \frac{\frac{N}{N-2}q}{pq-1} \Leftrightarrow q < \mathcal{Q}^*(p).$$

Jednoduchým rátaním dostaneme

$$\|v^p\|_{L^z(\Omega)} = \left(\int_\Omega v^{pz-r}v^r \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{z}} \leq M^{p-\frac{r}{z}}\|v\|^{\frac{r}{z}}_{L^r(\Omega)}.$$

Vieme, že $\|\tilde{g}\|_{L^1(\Omega)} = \|v\|_{L^1(\Omega)} = C$ (pozri začiatok dôkazu Vety 3.1) preto z Lemy 2.8 z dôvodu $r < N/(N-2)$ máme $\|v\|_{L^r(\Omega)} \leq C$ a teda

$$\|v^p\|_{L^z(\Omega)} \leq M^{p-\frac{r}{z}}C.$$

Potom z rastových podmienok (1.6) je $\|\tilde{f}\|_{L^z(\Omega)} \leq M^{p-\frac{r}{z}}C$. Z (3.20) je $\frac{Nq}{2}(N-2z) < Nz$ a preto sa dá zvoliť $s > \frac{Nq}{2}$ dosatatočne blízko ku $\frac{Nq}{2}$ tak, že $s(N-2z) < Nz$. Potom z Lemy 2.8 je $\|u\|_{L^s(\Omega)} \leq M^{p-\frac{r}{z}}C$. Z rastových predpokladov (1.6) je $\|\tilde{g}\|_{L^{s/q}(\Omega)} \leq M^{q(p-\frac{r}{z})}C$. Ak teraz použijeme Lemu 2.8, tak z toho že $s > \frac{Nq}{2}$ dostaneme

$$M = \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M^{q(p-\frac{r}{z})}C.$$

Z voľby (3.20) plynie $q(p - \frac{r}{z}) < 1$ a preto $M < C$. Potom je $\|\tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$ a teda z Lemy 2.8 dostaneme druhý odhad $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$.

Druhý prípad. Prepokladajme $q < \frac{2}{N-2}$. Z predpokladov na parametre p, q vyplýva, že je možné zvoliť $r \in (q, \frac{N}{N-2})$ a $s > \frac{N}{2}$ tak, že

$$\kappa := \frac{q(p-r)(1-1/s)}{1-q/r} < 1.$$

Rovnako ako v predchádzajúcom prípade (pri $z := 1$) použitím Lemy 2.8 dvakrát dostaneme

$$\|\tilde{g}\|_{L^{r/q}(\Omega)} \leq CM^{q(p-r)}.$$

Z interpolačných nerovností dostaneme

$$\|\tilde{g}\|_{L^s(\Omega)} \leq \|\tilde{g}\|^{\alpha}_{L^1(\Omega)} \|\tilde{g}\|^{1-\alpha}_{L^{r/q}(\Omega)} \leq CM^{q(p-r)(1-\alpha)}$$

pre $\alpha + (1-\alpha)q/r = 1/s$. Potom $q(p-r)(1-\alpha) = \kappa < 1$ a preto na základe $s > N/2$ použitím Lemy 2.8 máme

$$M = \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M^\kappa C$$

z čoho vyplýva $M < C$ a tiež $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$, tým je dôkaz ukončený. □

3.5 Kritické krivky v $p - q$ rovine

Pripomeňme, že p_{sg} je definované vo Vete 1.1 a p^* v kapitole 3.2. Zhrnutím našich výsledkov dostaneme (pozri obrázok 3):

(i) Ak

$$1 < p < p_{sg},$$

tak úlohy (1.5) a $(1.5)_N$ majú rovnaké kritické krivky $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^* = q_n^*$, teda pod touto krivkou ($q < \mathcal{Q}(p)$) sú všetky nezáporné v.s. riešenia ohraničené (Veta 3.1) a nad touto krivkou ($q > \mathcal{Q}(p)$) sa nájde príklad neohraničeného v.s. riešenia (Veta 3.3).

(ii) Ak

$$p^* \leq p < \frac{N+1}{N-3},$$

tak zase úlohy (1.5) a $(1.5)_D$ majú rovnaké kritické krivky $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^* = q_d^*$ (Vety 3.2,3.3).

(iii) Ak

$$p_{sg} \leq p < p^*,$$

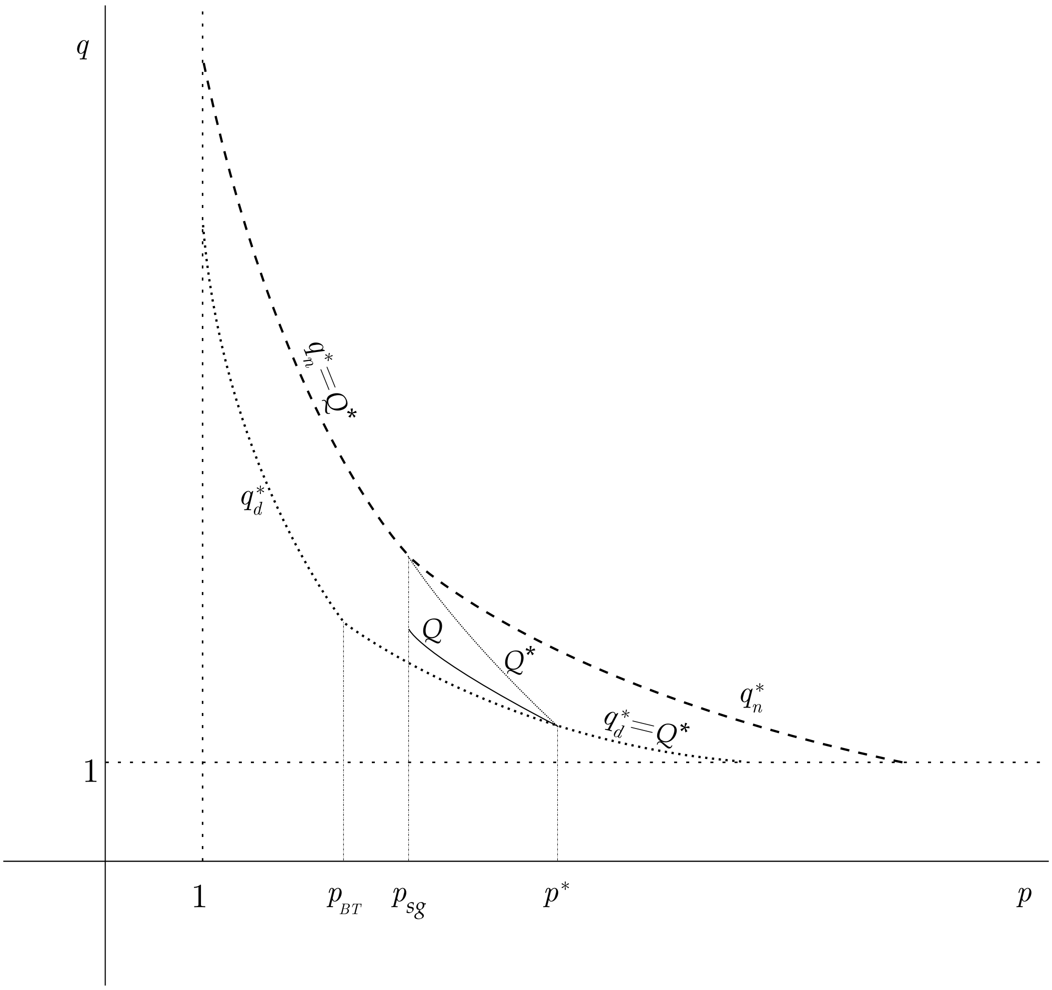
tak $q_d^* < \mathcal{Q} < \mathcal{Q}^* \leq q_n^*$ a

(a) pre $q < \mathcal{Q}(p)$ sme dokázali ohraničenosť nezáporných v.s. riešení (Veta 3.2),

(b) pre $q > \mathcal{Q}^*(p)$ sme našli príklad na neohraničenosť nezáporného v.s. riešenia (Veta 3.3),

(c) pre $\mathcal{Q}(p) \leq q < \mathcal{Q}^*(p)$, teda pre $(p, q) \in \mathcal{K}$ sme dokázali apriórne odhady iného typu: pre ohraničené nezáporné v.s. riešenia (Veta 3.5).

Tieto výsledky sa extrémne zjednodušia v prípade $N \leq 2$ stačí si uvedomiť, čo hovorí Poznámka 3.4. Otázka apriórnych odhadov je riešená vo Vete 3.11.



Obr. 3: Kritické krivky v $p - q$ rovine pre $N > 4$

4 Existencia riešenia

V tejto kapitole budeme skúmať úlohu (1.5) s rastovými predpokladmi (1.4) a (3.12). Novým predpokladom bude

$$f(x,v) = o(v), \text{ pre } v \to 0^+, \qquad g(x,u) = o(u), \text{ pre } u \to 0^+ \tag{4.1}$$

rovnomerne pre každé $x \in \Omega$. Takýto predpoklad je uvažovaný tiež v [2] pre systém $(1.5)_D$.

Pri týchto predpokloch štandardným postupom dokážeme existenciu ohraničeného v.s. riešenia úlohy (1.5).

4.1 Index pevných bodov a jeho základné vlastnosti

V tejto časti uvedieme základné vlastnosti indexu pevného bodu (robíme to podľa článku [15], iným zdrojom je napríklad [16]). Nech X je Banachov priestor a K je uzavretý konvexný kužeľ (to znamená, že K je uzavretý a pre $x, y \in K, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ je $\alpha x + \beta y \in K$). Nech $W \subset C$ je relatívne otvorená, teda existuje otvorená množina O v X, že $W = K \cap O$. Ďalej majme kompaktné zobrazenie $T : \overline{W} \to K$ (to znamená, že T je spojité a $\overline{T(B)}$ je kompakt pre každdú ohraničenú množinu $B \subseteq \overline{W}$) pričom $T(x) \neq x$ pre $x \in \overline{W} \backslash W$. Potom T sa dá rozšíriť na kompaktné zobrazenie $\overline{T} : \overline{O} \to K$ také, že $\overline{T}(x) \neq x$ pre $x \in \overline{O} \setminus O$.

Index pevných bodov (značíme $i_K(T, W)$) zobrazenia T vzľadom na W a K sa definuje, ako Lerayov-Schauderov stupeň zobrazenia $I - \overline{T}$ vzhľadom na množinu O a bod 0, teda

$$i_K(T, W) := \deg(I - \overline{T}, O, 0).$$

Tento index nezávisí od výberu O ani od rozšírenia $\overline{T}$ a zdedí známe vlastnosti L-S stupňa:

(i) **Normalizácia**: Pre konštantné zobrazenie $T : \overline{W} \to W$ je $i_K(T, W) = 1$.

(ii) **Aditivita**: Pre relatívne otvorené $W_1, W_2 \subseteq W, W_1 \cap W_2 = \emptyset$ také, že $Tx \neq x$ pre $x \in \overline{W} \setminus (W_1 \cup W_2)$ máme $i_K(T, W) = i_K(T, W_1) + i_K(T, W_2)$.

(iii **Homotopická invariantnosť:** Majme homotópiu $\mathcal{H} : [0,1] \times \overline{W} \to K$, ktorá je kompaktná a $\mathcal{H}(t,x) \neq x$ pre $t \in [0,1], x \in \overline{W} \setminus W$. Potom $i_K(\mathcal{H}(t,\cdot), W)$ je konštantné pre $t \in [0,1]$.

(iv) **Vyrezávanie**: Pre relatívne otvorenú $V \subseteq W$ takú, že $T(x) \neq x$ pre $x \in \overline{W} \setminus V$ platí $i_K(T, W) = i_K(T, V)$.

(v) **Existencia**: Ak $i_K(T, W) \neq 0$, tak existuje pevný bod $x \in W$ zobrazenia T, teda $T(x) = x$.

4.2 Aplikácia apriórnych odhadov

Veta 4.1. *Predpokladajme o funkciách* f, g (4.1) *a* (1.6),(3.12) *s parametrami*

$$p \geq p_1 > 2, \quad 1 < q_1 \leq q < \mathcal{Q}^*(p).$$

Potom existuje dvojica $(u, v) \in L^\infty \times L^\infty$ *nezáporných funkcií, ktoré sú v.s. riešením úlohy* (1.5)*, naviac* $||u||_{L^\infty} + ||v||_{L^\infty} \geq \varepsilon$*, pre dostatočne malé* $\varepsilon > 0$.

Dôkaz. V zmysle predchádzajúcej podkapitoly položme

$$X := L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega), \qquad K := \{(u,v) \in X \quad | \quad u \geq 0, v \geq 0\}.$$

Definujme lineárny operátor $\mathcal{S} : X \to X$ ktorý priradí dvojici $(\phi, \psi) \in X$ jediné v.s. riešenie úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \phi, \quad x \in \Omega, \\ -\Delta v + v &= \psi, \quad x \in \Omega, \\ u = \partial_\nu v &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Položme

$$T : K \to K, \qquad T(u,v) = \mathcal{S}(f(\cdot, v(\cdot)), g(\cdot, u(\cdot))).$$

Definujme pre $\alpha > 0$ množinu

$$W_\alpha := \{(u,v) \in K \quad | \quad ||(u,v)||_X < \alpha\}.$$

Krok 1. Zobrazenie T je kompaktné.
Dokážme najprv spojitosť!

V zmysle kapitoly 2 máme $T = (T_1, T_2)$, kde

$$T_1(u,v) = \int_\Omega \mathcal{G}(x,y) f(y, v(y)) \mathrm{d}y, \quad T_2(u,v) = \int_\Omega \mathcal{N}(x,y) g(y, u(y)) \mathrm{d}y.$$

Majme $\{(u_n, v_n)\}_{n=1}^\infty \subset K, (u,v) \in K$ a nech $(u_n, v_n) \to (u,v)$ v priestore X pre $n \to \infty$. Chceme dokázať, že $T(u_n, v_n) \to T(u,v)$ v priestore X pre $n \to \infty$. Stačí dokázať pre $j = 1, 2$, že $T_j(u_n, v_n) \to T_j(u,v)$ v priestore L^∞ pre $n \to \infty$. Urobíme dôkaz pre $j = 1$ (prípad $j = 2$ je analogický).

Z toho, že $f \in \mathrm{Car}(\Omega, \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ dostaneme, že $f(x, v_n(x)) \to f(x, v(x))$ pre s.v. $x \in \Omega$. Ďalej z odhadu (1.6) dostaneme pre s.v. $x \in \Omega$

$$|f(x, v_n(x)) - f(x, v(x))| \le c(2 + \|v_n\|^p_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|^p_{L^\infty(\Omega)}).$$

Bez ujmy na všeobecnosť môžeme prepokladať, že $\|v_n\|^p_{L^\infty(\Omega)} \le \|v\|^p_{L^\infty(\Omega)} + 1$ a preto pre $1 \le k < \infty$ máme majorizáciu pre s.v. $x \in \Omega$

$$|f(x, v_n(x)) - f(x, v(x))|^k \le c^k (3 + 2\|v\|^p_{L^\infty(\Omega)})^k.$$

Potom z Lebesgueovej vety o dominantnej konvergencii dostaneme, že pre každé $1 \le k < \infty$ platí

$$f(\cdot, v_n(\cdot)) \to f(\cdot, v(\cdot))$$

v priestore L^k pre $n \to \infty$. Všimnime si, že

$$\begin{aligned} \|T_1(u_n, v_n) - T_1(u,v)\|_{L^\infty(\Omega)} &\le C \|I_2 \left(|f(\cdot, v_n(\cdot)) - f(\cdot, v(\cdot))| \right) \|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\le C ||I_2||_{\mathscr{L}(L^k, L^\infty)} \|f(\cdot, v_n(\cdot)) - f(\cdot, v(\cdot))\|_{L^k(\Omega)} \end{aligned}$$

pričom prvá nerovnosť plynie z horného odhadu (2.7) (C je konštanta z tohto odhadu, $r, s := \infty$) a druhá z poznámky 2.1 pričom treba si zvoliť $k > N/2$. Tento odhad dokazuje spojitosť T_1.

Teraz ukážeme, že T zobrazuje ohraničené množiny na predkompaktné (množina je predkompaktná, keď jej uzáver je kompaktný).

Majme $C_1 > 0$ potom pre $(u,v) \in \overline{W_{C_1}}$ je

$$\begin{aligned} \|f(\cdot, v(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)} &\le \|c(1 + (v(\cdot))^p)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_2 \\ \|g(\cdot, u(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)} &\le \|c(1 + (u(\cdot))^q)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_2 \end{aligned}$$

pričom $C_2 = c(1 + \max\{C_1^p, C_1^q\})$. Potom $||(f(\cdot, v(\cdot)), g(\cdot, u(\cdot)))||_X \le 2C_2$.

Ďalej je známe, že

$$\mathcal{S} \in \mathscr{L}(X, Y), \quad Y := W^{2,k}(\Omega) \times W^{2,k}(\Omega)$$

pre každé $1 < k < \infty$. Použitím Sobolevových vnorení pre $k > N$ je $W^{2,k} \subset C^1(\overline{\Omega})$. Z Arzela-Ascoliho vety máme kompaktné vnorenie $C^1(\overline{\Omega}) \subset\subset C(\overline{\Omega})$. Triviálne $C(\overline{\Omega}) \subset L^\infty$, preto pre $k > N$ platí

$$W^{2,k} \subset\subset L^\infty. \tag{4.2}$$

Pretože

$$\mathcal{S} \in \mathscr{L}(X, Y)$$

dostaneme

$$||\mathcal{S}(f(\cdot, v(\cdot)), g(\cdot, u(\cdot)))||_Y \leq ||\mathcal{S}||_{\mathscr{L}(X,Y)}||(f(\cdot, v(\cdot)), g(\cdot, u(\cdot)))||_X \leq C_3,$$

kde $C_3 = 2C_2||\mathcal{S}||_{\mathscr{L}(X,X)}$.

Pre $k > N$ použitím (4.2) dostaneme, že $\overline{T(B)}$ je kompaktné v X, preto zobrazenie T je kompaktné.

Keď si ešte raz prejdeme tento krok, tak vidíme, že pre $(u, v) \in X$ je

$$||T(u, v)||_X \leq C_4||(f(\cdot, v(\cdot)), g(\cdot, u(\cdot)))||_X, \tag{4.3}$$

kde $C_4 := ||\mathcal{S}||_{\mathscr{L}(X,Y)}||I||_{\mathscr{L}(Y,X)}$ (I značí identitu).

Krok 2. Pre $\varepsilon > 0$ dosť malé, je $i_K(T, W_\varepsilon) = 1$.

Najprv ukážeme, že pre $\varepsilon > 0$ dosť malé je $T(x) \neq x$ pre každé $x \in \overline{W_\varepsilon} \setminus W_\varepsilon$. Naozaj, pretože z (4.3) dostaneme

$$||x - T(x)||_X \geq ||x||_X - ||T(x)||_X \geq ||x||_X - C_4||(f(\cdot, v(\cdot)), g(\cdot, u(\cdot)))||_X,$$

ale potom pre dostatočne malé $\varepsilon > 0$ z predpokladu (4.1) plynie, že pre každé $x \in \overline{W_\varepsilon} \setminus W_\varepsilon$ je $||x - T(x)||_X \geq ||x||_X - ||T(x)||_X > 0$ a teda $x \neq T(x)$.

Zoberme si homotópiu $\mathcal{H}_1 : [0, 1] \times K \to K$, ktorá je daná vzťahom

$$\mathcal{H}_1(t, u, v) := tT(u, v)$$

potom pre každé $t \in [0, 1]$ a $x \in \overline{W_\varepsilon} \setminus W_\varepsilon$ je

$$||x - \mathcal{H}_1(t, u, v)(x)||_X = ||x - tT(x)||_X \geq ||x||_X - t||T(x)||_X \geq ||x||_X - ||T(x)||_X > 0,$$

teda $x \neq T(x)$.

Potom na základe homotopickej invariancie

$$i_K(T, W_\varepsilon) = i_K(\mathcal{H}(1, \cdot, \cdot), W_\varepsilon) = i_K(\mathcal{H}(0, \cdot, \cdot), W_\varepsilon) = i_K(0, W_\varepsilon) = 1.$$

Krok 3. Pre $R > 0$ dostatočne veľké, je $i_K(T, W_R) = 0$. Tu sa využijú apriórne odhady.

Nech $\eta > 0$ je konštanta z Lemy 3.2. Definujme homotópiu $\mathcal{H}_2 : [0,1] \times K \to K$, nasledovným spôsobom

$$\mathcal{H}_2(t,u,v) := \mathcal{S}(f(\cdot, v(\cdot)) + \eta t, g(\cdot, u(\cdot))).$$

Úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x,v) + \eta t, & x \in \Omega, \\ -\Delta v + v &= g(x,u), & x \in \Omega, \\ u = \partial_\nu v &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

pre $t \in [0,1]$ spĺňajú (1.6) (samozrejme s inou konštantou c). Je splnená aj (3.12) a teda z Viet 3.1,3.2,3.4,3.5 plynie, že platia apriórne odhady. Potom keď $R > \varepsilon$ je dostatočne veľké, tak $x = \mathcal{H}_2(t,x)$ nemôže platiť pre žiadne $t \in [0,1], x \in \overline{W_R} \setminus W_R$ pretože máme apriórny odhad $||x||_X \leq C$.

Z vlastnosti homotopickej invariancie

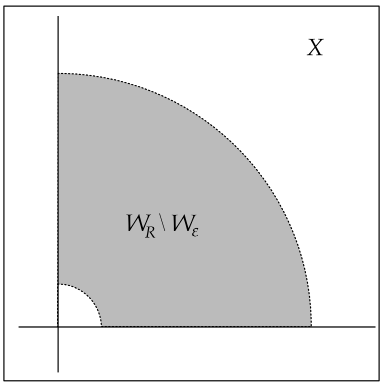
$$i_K(T, W_R) = i_K(\mathcal{H}(0,\cdot,\cdot), W_R) = i_K(\mathcal{H}(1,\cdot,\cdot), W_R).$$

Ale z Lemy 3.2 plynie, že $i_K(\mathcal{H}(1,\cdot,\cdot), W_R) = 0$.

Krok 4. Existencia. Z aditivity indexu pevných bodov plynie, že

$$0 = i_K(T, W_R) = i_K(T, W_R \setminus \overline{W_\varepsilon}) + i_K(T, W_\varepsilon) = i_K(T, W_R \setminus \overline{W_\varepsilon}) + 1$$

preto $i_K(T, W_R \setminus \overline{W_\varepsilon}) = -1$ a teda existuje pevný bod zobrazenia T v množine $W_R \setminus \overline{W_\varepsilon}$, a tým je dôkaz dokončený. Pre lahšiu predstavu pozri obrázok 4. □

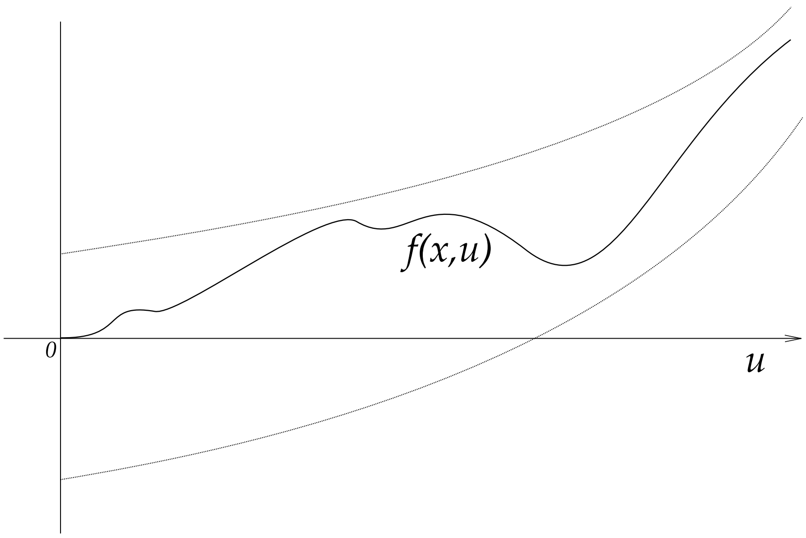


Obr. 4: Pomocný obrázok

Poznámka 4.1. Z dôkazu je jasné, že sme našli aspoň dve v.s. riešenia úlohy 1.5. Aspoň jedno sa nachádza v množine W_ε a aspoň jedno rôzne vo $W_R \setminus \overline{W_\varepsilon}$.

Poznámka 4.2. Uvedomme si, že predpoklady Vety 4.1 nie sú až také obmedzujúce (typická funkcia je znázornená na obrázku 5), napríklad modelový príklad (3.1) spĺňa všetky, ak

$$p > 2, \quad 1 < q < \mathcal{Q}^*(p).$$



Obr. 5: Typický graf funkcie f pre pevné $x \in \Omega$

Záver

V tejto práci sme riešili otázky týkajúce sa ohraničenosti a apriórnych odhadov riešení zmiešanej okrajovej úlohy. Naše úvahy ani zďaleka nepokrývajú variabilitu danej problematiky. Je mnoho smerov, ktorými sa dajú ďalej rozvíjať získané výsledky, z ktorých niektoré sú optimálne, ako sa ukázalo v podkapitole 3.2, ale nie všetky. Nenašli sme odpoveď na otázku, či môže existovať neohraničené nezáporné v.s. riešenie pre parametre (p, q) z kritickej množiny $\mathcal{K}$ (viď podkapitolu 3.5). Ďalej je tiež otvorená otázka apriórnych odhadov pri $p \leq 2$ (Veta 3.4 dáva odpoveď za predpokladu $p > 2$). V odbornej literatúre sa často uvažujú prípady, kde sa pripúšťa $p \leq 1$ alebo $q \leq 1$, ktoré sme my úplne vylúčili. Tiež je možné študovať systémy typu (1.5) s komplikovanejšími pravými stranami a s inými rastovými predpokladmi. Našu prácu je možné zovšeobecniť aj na riešenia, ktoré menia znamienko.

Najzaujímavejším výsledkom tejto práce je, že kritické krivky zmiešanej okrajovej úlohy pre niektoré parametre sa zhodujú s kritickou krivkou úlohy len s Dirichletovými okrajovými podmienkami a pre iné parametre s kritickou krivkou úlohy len s Neumannovými okrajovými podmienkami. Takto však nevyčerpáme všetky možné parametre. Pre ostatné sme dokázali čiastočné výsledky, z ktorých plynie, že kritické krivky zmiešanej úlohy *majú* v tomto prípade odlišný charakter (pozri podkapitolu 3.5). Tým sme vlastne ukázali, že okrajové podmienky majú veľký vplyv na ohraničenosť v.s. riešenia.

Literatúra

[1] **P. Quittner, Ph. Souplet**
Superlinear Parabolic Problems. Blow-up, Global Existence and Steady States
Birkhäuser Advanced Texts, Birkhauser, Basel 2007

[2] **P. Quittner, Ph. Souplet**
A priori Estimates and Existence for Elliptic Systems via Bootstrap in Weighted Lebesgue Space
Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. **174**, 2004, pp. 49-81

[3] **Ph. Souplet**
Optimal regularity conditions for elliptic problems via L^p_δ spaces
Duke Mathematical Journal, Vol. **127**1, 2005, pp. 175-192

[4] **L. C. Evans**
Partial Differential Equations
Graduate Studies in Mathematics Volume 19
American Mathematical Society, 1998

[5] **O.A. Ladyzhenskaya, N.N. Ural'tseva**
Linear and Quasilinear Elliptic Equations
Nauka, Moskva 1964; anglický preklad Academic Press, 1968

[6] **J. Malý, W.P. Ziemer**
Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations
AMS Bookstore, 1997

[7] **X. Tao, H. Wang**
On the Neumann Problem for the Schrödinger eguations with Singular Potentials in Lipshitz Domains
Canadian Journal of Mathematics, Vol. **56**(3), 2004, pp. 655-672

[8] **Z. Shen**
Weighted Estimates in L^2 for Laplace's Equation on Lipschitz Domains
Transactions of the American Mathematical Society, Vol. **357**(7), 2004, pp. 2843-2870

[9] **Z. Shen**
On the Neumann Problem for Schrödinger Operators in Lipschitz Domains
Indiana University Mathematics Journal, Vol. **43**(1), 1994, pp. 144-176

[10] **P.J. McKenna, W. Reichel**
A priori bounds for semilinear equations and a new class of critical exponents for Lipschitz domains
Journal of Functional Analysis, Vol. **244**, 2007, pp. 220-246

[11] **Z. Zhao**
Green Function for Schrödinger Operator and Conditioned Feynman-Kac Gauge
Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol **116**, 1986, pp. 309-334

[12] **H. Brezis, R.E.L. Turner**
On a class of superlinear elliptic problems
Communications in Partial Differential Equations , Vol **2**, 1977, pp. 601-614

[13] **Li Yuxiang**
Optimal conditions for L^∞-regularity and a priori estimates for elliptic systems, I: two components
eprint arXiv:0805.4550

[14] **Li Yuxiang**
Optimal conditions for L^∞-regularity and a priori estimates for elliptic systems, II: $n(\geq 3)$ components
Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol **351**, 2009, pp. 257-276

[15] **C.O. Alves, D.G. De Figueiredo**
Nonvariational Elliptic Systems
Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol **8**, 2002, pp. 289-301

[16] **L. Ambrosio, N. Dancer**
Calculus of variations and partial differential equations
Springer, Berlin 2000