

Co je a není matematika aneb zbytečná pomaturitní polemika o čepici¹

Jana Musilová

Nedávno se rozvinula rozsáhlá emotivní diskuse o zadání úlohy č. 22 v didaktickém testu z matematiky v rámci letošních maturit. Ze zdánlivě jednoduchého problému se stalo takřka „politikum“. Případ, který by se jako jednotlivost mohl jevit problémem banálním, odhalil obecnější slabiny tvorby zadání pro „státní“ maturitu z matematiky. V čem spočíval konkrétní problém? Úloha je zadána takto:

Papírová čepice má tvar rotačního kužele. Po straně je slepena lepicí páskou. (Okraje papíru jsou k sobě přiloženy a v místě lepení se nepřekrývají.) Osovým řezem kužele je rovnostranný trojúhelník s délkou strany 16 cm.



Kolik cm^2 papíru je použito na čepici?

- A) $96\pi \text{ cm}^2$ B) $128\pi \text{ cm}^2$ C) $192\pi \text{ cm}^2$ D) $256\pi \text{ cm}^2$ E) jiný počet

Předmětem diskusí se stala skutečnost, že odpověď B) udává plošný obsah pláště kužele daných rozměrů (průměr podstavy 16 cm, shodný s délkou povrchové úsečky), zatímco odpověď C) představuje plošný obsah celého povrchu kužele, složeného z pláště a podstavy. Někteří studenti zvolili odpověď C), která je zadavatelem označena jako chybná. Tato interpretace byla odbornou komisí potvrzena poté, co se objevila odvolání studentů s argumentací, že i odpověď C) by měla být považována za správnou.

Snad nejstručnější možná charakteristika zavádějící podstaty zadání úlohy je tato:

Aby student, který umí spočítat plošný obsah jak pláště kužele, tak jeho povrchu, mohl „správně“ rozhodnout mezi definitoricky „správnou“ odpovědí B) a definitoricky „nesprávnou“ odpovědí C), musí hlavně řešit otázku „co je to čepice“ z pohledu zadavatelů úlohy.

Jistě je možné shodnout se na tom, že zrovna tohle není ta „správná“ matematika. Rozeberme věc podrobněji. Problematický charakter úlohy má dvojí příčinu:

- 1) Svým obsahem je úloha typicky takzvaně *otevřená*, tj. vyžadující samostatné řešení. Zadavatelé ji však, věcně nesprávně, formulovali jako *uzavřenou*, s výběrem jedné správné odpovědi z pěti. (Mimochodem, nejde o jedinou úlohu s touto závadou v maturitních testech.)

¹ Na stránce Odborné skupiny Organizace výzkumu věnované LXVIII. Akademickému fóru byla původně omylem publikována nesprávná verze tohoto příspěvku – viz Dodatek k pozvánce. Čtenářům se za to omlouváme.

- 2) Z nepochopitelných důvodů zadavatelé parafrázovali jednoduché a jednoznačné zadání například typu „Určete plošný obsah pláště kužele, jehož osovým řezem je rovnostranný trojúhelník o straně 16 cm“, do (problematické) podoby rádobý „příkladu ze života či praxe“.

Komentář ad 1):

Proč je formulace úlohy jako uzavřené věcně nesprávná?

- Všechny odpovědi jsou toho charakteru, že **o správné odpovědi nelze rozhodnout bez předchozího kompletního výpočtu, tedy bez řešení úlohy jako otevřené.**
- Vyloučit hned by bylo možné pouze odpověď E), neboť pojem „počet“ předpokládá hodnotu v oboru přirozených čísel, a ta výsledkem této konkrétní úlohy být nemůže. Z kontextu zadání se však věc nejeví tak, že by cílem zadavatelů bylo, aby student právě tuto úvahu provedl. Mezi zbývajících čtyřmi odpověďmi by stejně nebylo možno rozhodnout bez výpočtu, založeného například na následující úvaze:

Rozvinutý plášť kužele má tvar kruhové výseče o poloměru $D = 16$ cm a délce obvodového oblouku $o = 16\pi$ cm (shodné s obvodem podstavy). Středový úhel výseče v obloukové míře je $\alpha = o / D = \pi$. Rozvinutý plášť kužele je tedy půlkruhem o poloměru $D = 16$ cm a jeho plošný obsah je $P = \frac{1}{2} \pi D^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 16^2 \text{ cm}^2 = 128\pi \text{ cm}^2$.

Výsledek souhlasí s odpovědí B). Úvaha i výpočet jsou sice velmi prosté, ale odpověď bez jejich provedení vybrat nelze. I kdyby měl student dostatek zkušeností (získaných řešením mnoha obdobných otevřených úloh) a vyloučil odpovědi A) a D) jako „málo“ a „moc“, těžko již bez výpočtu rozhodne mezi B) a C).

Komentář ad 2):

Pokud bylo cílem zadavatelů, aby student správně odlišil pojmy „plášť kužele“ a „povrch kužele“, pak tím spíše měli zadání jasně formulovat. V čem jsou nejasnosti či terminologické nepřesnosti zadání:

- Kužel je defintoricky trojrozměrné těleso, zatímco čepice bez „dna“ je částí kuželové plochy – pláštěm kužele, čepice se dnem je povrchem kužele. **Slovní spojení „čepice má tvar kužele“ je z terminologického hlediska přinejmenším velice nepřesné. Zadání tak fakticky nespecifikuje útvar, jehož plošný obsah se má počítat.**
- Opakující se argumentace, že „zadání je standardní“, neobstojí, neboť výše uvedenou terminologickou nepřesnost, které se zadavatelé dopustili, stěží sami mohou považovat za standardní. Řešitel úlohy nemůže vědět, která z možných nepřesných formulací je pro zadavatele standardní. Přirovnání čepice ke kuželi za „standardní“ matematickou terminologii jistě považovat nelze (takové přirovnání může snad být, i přes svou nepřesnost, funkční na prvním stupni základní školy, kde se děti učí poznávat tělesa).
- Argument matematika (sic!), že fakt, že čepice nemá dno, je jasný z jejího pokreslení, zní komicky, zejm. s ohledem na řez zakreslený plnou čarou na tomto „neexistujícím“ dnu. Odpověď C), prohlášená odborníky bez jakýchkoli pochyb za „špatnou“, může být silně zavádějící spíše pro přemýšlivé studenty. Právě tím, že představuje „správný“ plošný obsah celého povrchu kužele. Vypočte-li student věci znalý správně plošný obsah pláště, tj. hodnotu B), téměř jistě si všimne, že odpověď C) odpovídá celému povrchu. Začne možná přemýšlet, „co je to vlastně čepice“ – viz charakteristika výše. Kterou z odpovědí B), resp. C) pak označí za správnou, bude výsledkem této úvahy. Označení odpovědi C) takového studenta diskvalifikuje „z moci úřední“, přestože umí úlohu vyřešit.

Celkově lze shrnout:

- Kdyby zadání nehovořilo o „čepici“, ale o plášti kužele, k problému by nedošlo. Kdyby úloha, byť s problematickým pojmem „čepice“, byla zadána jako otevřená, k zásadnímu problému by rovněž nedošlo, neboť opravovatelé by mohli sledovat postup studentova výpočtu a patřičně jej bodově ohodnotit.

A poučení?

- Uzavřené úlohy jsou oblíbené proto, že se snadno hodnotí. Jejich tvorba je však obtížná citlivostí na jednoznačnost a přesnost zadání, které nesmí zavdávat příčinu k úvahám, co je či není „standardní“. Proto je nutné přistupovat k jejich formulaci se zvýšenou pečlivostí.
- Zadání maturitních úloh vzniká v poměrně úzké a málo obměňované skupině zadavatelů a posuzovatelů. Mělo by proto procházet nezávislou a především nezaujatou oponenturou častěji obměňovaného grémia odborníků, resp. učitelů vně této skupiny. Argument „rizika vyžrazení“, který se zde možná objeví, je jistě předem odsouzen k nezdaru.

Lze jen těžko pochopit, že zadavatelé zarytě hájí vlastní (drobnou a snad i omluvitelnou) chybu a poskytují tak prostor diskusím, které nejen poškozují jejich odbornou i morální pověst (s tím ať se vypořádají oni sami), ale přispívají k obecně narůstající averzi vůči maturitě z matematiky, a – co je nejškodlivější – k averzi vůči matematice samotné. Přitom:

Uznání odpovědi C) rovněž za správnou, popřípadě (již méně vhodné) anulování celé úlohy, by bylo řešením korektním a zároveň nejjednodušším.