Meze matematického myšlení aneb z výuky matematiky pro nematematické obory

Jan Janík, Michal Lenc, Pavla Musilová, Jana Musilová

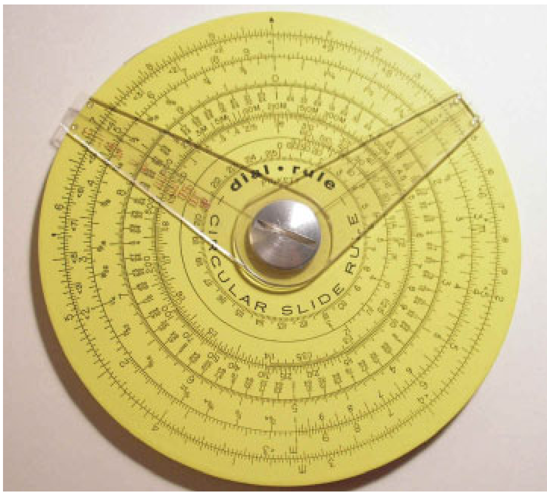
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, Kotlářská 2, 611 37 Brno;
honza@physics.muni.cz, lenc@physics.muni.cz, pavla@physics.muni.cz, janam@physics.muni.cz

K úrovni matematického povědomí

Matematické znalosti, úroveň matematického myšlení a dokonce i logického uvažování žáků a studentů středních i vysokých škol rok od roku klesají. Tato zkušenost je bohužel obecná a týká se celé současné populace (snad až na výjimky vcelku stabilních špiček, úspěšně prokazujících svou úroveň v přírodovědných soutěžích různých typů – viz např. [1]). Ukazují to i testy matematické a přírodovědné gramotnosti PISA, viz např. [2], v nichž čeští žáci nedopadají dobře. (Fakt, že úroveň žáků „vzorových" USA je znatelně horší, není útěchou.) Tento trend se samozřejmě projevuje o to více, že se středoškolské i vysokoškolské studium stává záležitostí vysokého procenta populace (střední škola téměř 90 % v roce 2009 oproti 66 % v roce 1995, vysoká škola cca 60 % v roce 2009 oproti 25 % v roce 2000[1]). Pokles úrovně numerického myšlení a logických a analytických schopností pozorujeme spíše u uchazečů a studentů přírodovědných a technických oborů než v oborech žádaných až přeplněných (právo, ekonomie). Pesimismus navozený touto situací by jen zdánlivě mohl zmírnit následující citát [3], z jehož pěkné češtiny a poukazu na logaritmické tabulky je poznat závan minulých dob:

… považlivá zkušenost je stále klesající hladina matematického a geometrického vzdělání, které si přinášejí – vlastně nepřinášejí – absolventi středních škol. Technici ve druhém roce neznají vzorce pro obvod a plochu kruhu, pro povrch a obsah válce, kužele, koule – neznají pouček o střední úměrné, podobnosti trojúhelníků, nedovedou sečísti dva zlomky o různém jmenovateli, neumějí hledat v logaritmických tabulkách, atd., atd. Vědomosti fysikální ze střední školy jsou také většinou ubohé…

S ohledem na všeobecně známou tehdejší (předválečná léta) úroveň studia na středních a vysokých školách však snadno usoudíme, že si autor nepochybně posteskl spíše nad jednotlivými jevy než nad všeobecně špatnou úrovní. Pojmy, které jsou pro dnešního průměrného vysokoškoláka často nepřekonatelnou



Logaritmická pravítka všeho druhu – pro matematické myšlení důležitější než kalkulátory.

překážkou, byly totiž v prvorepublikové době běžně pochopitelné žactvu měšťanky [4] a ještě v 80. letech alespoň středoškolákům, ať již gymnazistům [5], nebo frekventantům učňovských škol s maturitou [6], a zcela bezpečně byly ovládány studenty prvních semestrů vysokých škol s přírodovědným, medicínským či technickým zaměřením. Dnešní stav je závažným nedostatkem nejen u studentů oborů, pro něž je matematika základním prostředkem k pochopení problematiky oborů samotných, ale i v řadě profesí, které s matematikou jako vědní disciplínou nemají sice takřka nic společného, ale v nichž hraje porozumění základním pojmům a správnost třeba i jednoduchého počítání klíčovou roli – lékařství, farmacie, ekonomie apod. Zejména ve zdravotnických oborech může mít základní počtářská nedostatečnost fatální následky.

Jednoduše – matematické „povědomí" přestává být součástí vzdělanosti a kultury. Meze matematického myšlení, tj. takové matematické pojmy a postupy, které „průměrný občan", resp. „průměrný student" již nezvládá, se posouvají stále k vyšším věkovým kategoriím, resp. vyšším kategoriím formálního vzdělání. A téměř zapomenuta je teze Davida Hilberta:

1 Zdroj: Education at a glance, OECD 2011.

Hlavní význam matematiky pro všeobecné vzdělání člověka je v tom, aby dala možnost nejčistšího a nejbezprostřednějšího prožitku pravdy.

Meze matematického myšlení

K pojmům a oblastem matematiky, které podle našich zkušeností představují zmíněné meze, patří především

- inverzní operace – odčítání a dělení – zejména ve slovních úlohách (školní věk),
- zaokrouhlování – je problémem zcela obecným (viz příklad 1),
- trojčlenka, resp. úměra – je rovněž problémem všech věkových kategorií téměř bez ohledu na vzdělání (viz příklady 2, 3, 4),
- logaritmus a mocnina – středoškolská úroveň, činí však problémy i při studiu přírodovědných, medicínských a technických oborů na vysoké škole (viz příklad 5),
- geometrická posloupnost, úrokování – lidé si nedovedou úroky spočítat (v minulosti byla problematika složeného úrokování látkou měšťanky – viz [4]),
- pojem funkce, zejména logaritmické, exponenciální a goniometrické, a schopnost vyčíst potřebné údaje z grafické prezentace funkcí, viz též příklad 5,
- limita funkce, derivace složené funkce (příklad 6), integrál, popis přírodních dějů pomocí funkcí, které jsou řešením nejjednodušších diferenciálních rovnic,
- základní pojmy lineární algebry – lineární závislost a nezávislost vektorů, vektorové prostory, lineární zobrazení apod., tj. „úměra“ na vysokoškolské úrovni,
- logické výroky, zejména ekvivalence, implikace a její negace,
- pravděpodobnost, počítání s pravděpodobnostmi.

Výčet jistě není úplný a každý, kdo má zkušenosti s výukou matematiky, by asi mohl další „meze“ přidat. Domníváme se však, že ty hlavní jsme vystihli, jak dokládají ukázky z praxe.

Příklady ze života i z výuky

Níže zmíněné školní i mimoškolní situace jsou skutečné. Využíváme jich jako motivačních a tak trochu humorných praktických příkladů při výuce matematiky a fyziky pro nematematické a nefyzikální bakalářské obory, zejména pak tzv. obory „profesní“, s jejichž absolventy – bakaláři – se počítá pro přímý vstup do praxe.

Příklad 1 – zaokrouhlování

Za absenci povědomí o zaokrouhlování mohou i kalkulačky a počítače. Příklady typu 2 : 3 = 0,6666666, informující o počtu pozic na displeji kalkulačky uživatele, jsou běžné. Také následující tabulka 1 dokládá zmíněný problém. Až sedm platných míst nevyžaduje komentář (s ohledem na všeobecně známý způsob přisuzování bodů z „Metodiky hodnocení VaV“).

Příklad 2 – úměra – ze života

Tento skutečný příklad (tab. 2) se týká každého, kdo se nechce nechat ošidit při rozpočítávání nákladů celku na jednotlivé uživatele.

Konkrétní zkušenost ukázala, že si s výpisem neporadil nejen uživatel, ale ani příslušná referentka, technik a vedoucí firmy, která výpis vystavila. Problém spočívá v tom, že výpočet „dělá počítač“, jemuž referentka pouze zadá vstupní data a stiskne Enter.

Ohodnocené výsledky celkem		
počet	body	body po korekci
46,197	1 094,622	1 022,852
231,386	3 312,941	3 140,597
99,358	1 645,447	1 507,642
J_{imp} – článek v impaktovaném časopise		
počet	body	body po korekci
10,000	306,127	306,127
20,960	753,139	753,139
9,467	190,068	190,068

Tab. 1 Výřez z oficiální tabulky zpracované podle Metodiky hodnocení výsledků výzkumu, vývoje a inovací 2011 Radou pro výzkum, vývoj a inovace.

	uživatel	celek	náklad Kč
40% dle ploch	71,5 m^2	1 072,9 m^2	224 942,40
60% dle spotřeby	954 HA	13 632 HA	337 413,60
náklad Kč	38 603,58	562 356,00	562 356,00

Tab. 2 Část výpisu vyúčtování nákladů na teplo.

Příklad 3 – úměra – ze zdravotnictví

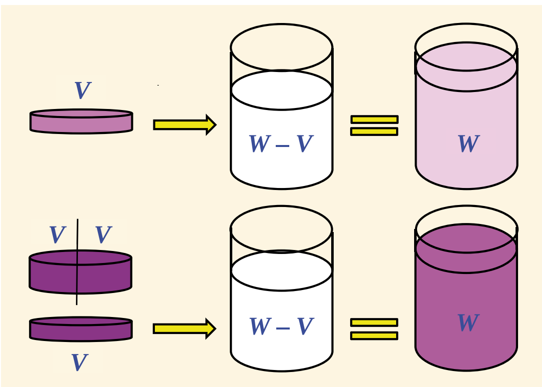
Problémem ve výuce i v praxi (uváděný příklad je skutečný) jsou úlohy na míchání roztoků: Ampule účinné látky do infuze dodávané firmou mají objem V a koncentrace účinné látky v nich je p % objemových. Rutinní postup při přípravě infuze o výsledném objemu W je takový, že do základního roztoku o objemu $W - V$ přidá sestra jednu ampuli léku. V případě dodávky ampulí (jinou firmou) o dvojnásobném objemu a dvojnásobné koncentraci probíhala příprava infuze tak, že do základu o objemu $W - V$ byla přidána polovina obsahu ampule.

Studenti, kteří mají rozhodnout, zda byl tento postup správný, mají zpočátku s úlohou problém. Pomocí obrázku ji snadno pochopí a pak již snadno formulují i početně (obr. 1).

Příklad 4 – úměra – roztoky, počítání s procenty

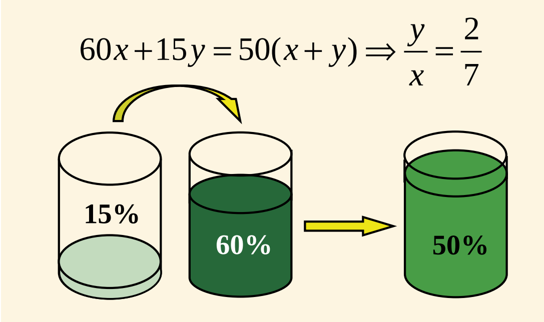
Podobná úloha pochází z testů analytického myšlení maturantů při přijímání na vysokou školu: V jakém poměru musíme smíchat 60% roztok s 15% roztokem, aby vznikl roztok 50%? Řešení je na obr. 2.

Kuriózní je, že úloha byla nakonec z testů vyřazena jako příliš obtížná se zdůvodněním, že vyžaduje pa-



Obr. 1 Obrázkové řešení úlohy o infuzi.

» Neznalosti v matematice, fyzice nebo chemii jsou stejnou vadou na intelektuální kráse člověka jako mezery v jeho vzdělání v literaruře, gramatice či historii. «



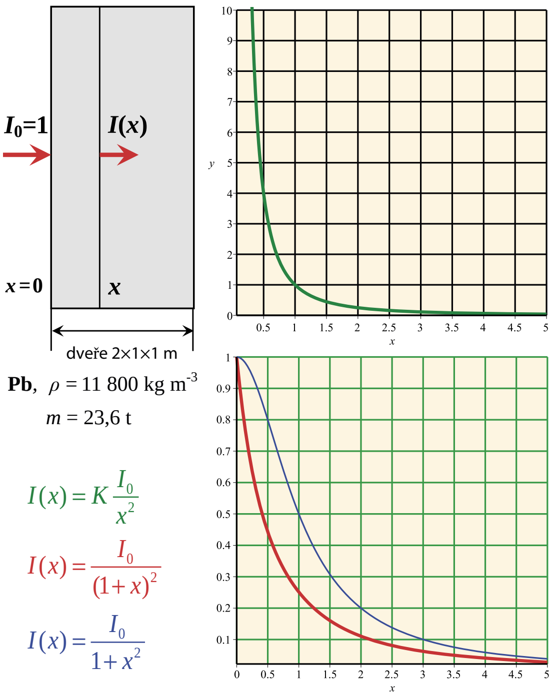
Obr. 2 Úměra – míchání roztoků.

matovat (!) si obecný vzorec, deklarovaný navíc jako (nežádoucí) paměťová znalost z chemie.

Přestože se s procenty stále více operuje i v denním tisku, v souvislosti s ekonomikou i jinak, chápe řada lidí tyto úvahy velmi povrchně a nedokáže je správně interpretovat. Tak například zjištěný fakt, že mezi nemocnými rakovinou plic je 90 % kuřáků, je běžně interpretován tak, že kuřák dostane s devadesátiprocentní pravděpodobností rakovinu plic. Za jednu z příčin, proč jsou problémem takto jednoduché úlohy na úměru, lze považovat současné opovrhování „rutinou" či „drilem" a preferování „tvůrčího přístupu". V dřívější školské matematice nikoho procvičování úměry nepřekvapovalo (stejně jako u klavíristy nikoho ani dnes nepřekvapuje nutnost „dřít" stupnice a prstová cvičení – potřebný reflex se jednoduše žádným „tvůrčím přístupem" nevytvoří). Lze jistě namítnout, že na výše uvedené úlohy stačí „zdravý rozum". Proč ho však lidé nepoužívají? Protože nejsou vedeni k jeho posilování – třeba právě onou rutinou, kterou můžeme daleko přívětivěji nazvat třeba početní praxí.

Příklad 5 – funkce – opět ze zdravotnictví

Pojem funkce je sám o sobě problémem, představu o průběhu a vlastnostech elementárních funkcí nemají absolventi střední školy téměř žádnou. Z fyziky mají



Obr. 3 Možné příklady „kvadratické" absorpce záření – kolik by vážily olověné dveře, kdyby intenzita záření měla klesnout na čtvrtinu (červená křivka)?

zafixováno, že velikost gravitační, resp. elektrostatické síly, jíž na sebe působí dvě hmotná, resp. nabitá tělesa, je nepřímo úměrná čtverci jejich vzdálenosti. O tom, jak takový pokles vypadá, však nemají dobrou kvantitativní představu, jsou ochotni považovat tuto závislost za téměř univerzální a aplikovat ji chybně dokonce i v praxi na situace, které se řídí zcela jinými zákonitostmi. Můžeme tak například být při demonstraci vyšetření rentgenovým zářením poučeni (skutečný případ), že intenzita škodlivého záření klesá se čtvercem tloušťky olověné výplně bezpečnostních dveří, resp. ochranné zástěry. Lidé přijmou takovou informaci jako fakt, který dále reprodukují, aniž by mu rozuměli – ani se nad ním nezamýšlí. Přitom stačí jednoduchá kvantitativní úvaha, která okamžitě ukáže nerealističnost tvrzení. Příklady kvadratických závislostí (za podmínky, že intenzita prošlá stěnou nulové tloušťky je rovna intenzitě primárního svazku) jsou na obr. 3 vyznačeny červenou a modrou křivkou.

Pochopení určitého základního souboru matematických pojmů, včetně praktického zacházení s nimi, je nezbytné pro studenty bakalářských přírodovědných oborů, ale i pro studenty oborů zdravotnických (např. oboru radiologický asistent), jimž se v tomto směru systematicky věnujeme v posledních letech. Studenti musí s ohledem na svou budoucí profesi pochopit podstatu fyzikálních dějů souvisejících se zářením a principy terapeutických a diagnostických přístrojů v radiologii. K tomu z matematiky nutně potřebují přinejmenším základní povědomí o lineární algebře a o chování alespoň těch funkcí, se kterými se v praxi setkají.

Studenti se s pojmem funkce sžívají poměrně obtížně, nemají představu o průběhu elementárních funkcí, ze střední školy neumějí logaritmovat a pracovat s mocninami. Mohou za to mj. opět kalkulačky a počítače, které nahradily ruční kreslení grafů na milimetrový papír, ale i pomůcky typu logaritmického pravítka tam, kde měly pozitivní vliv na pochopení problematiky logaritmování (kalkulačka názorně neukáže převod násobení na sčítání a umocňování na násobení). Přitom používání logaritmických a exponenciálních funkcí či logaritmické stupnice ve zdravotnictví je prakticky „denním chlebem": absorpce záření, radioaktivní rozpad, Weberův-Fechnerův zákon (obr. 4) apod. Důležité je i to, aby studenti pochopili, že diferenciální zákony, jimiž se řídí tyto jevy a jejichž integrace vede právě k exponenciálním funkcím, jsou fakticky „úměry" – změna veličiny (změna počtu radioaktivních jader za jednotku času, změna intenzity záření v dané hloubce vztažená na jednotku tloušťky) je úměrná veličině samotné (okamžitému počtu radioaktivních jader, intenzitě dopadající na vrstvu v dané hloubce).

Příklad 6 – funkce – z výuky

Jedním z příkladů (naštěstí ojedinělým) nepochopení pojmu proměnných veličin a funkce je následující „úprava" zlomku: $\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\mathrm{co}}{\mathrm{in}}$. Další ukázka se týká derivování složené funkce: $y(x)=\cos\sqrt{x}$, $y'(x)=?$ Studentské řešení:

$$[\cos]'=-\sin,\ \left[\sqrt{x}\right]'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow y'(x)=-\sin\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

Problémy v podpůrných matematických disciplínách, i když ne tak elementárního charakteru, se objevují i u studentů fyziky. Typicky by se daly charakterizovat například takto:

Lineární algebra v prvním a druhém semestru

- Studenti mají problém rozlišit vektor jako objekt a jeho reprezentaci v bázi (složky).
- Nemají algebraickou představivost, podléhají zavedeným konvencím a neuvažují o obsahu – například jednomyslně odhlasují, že $V = \{(1, x) \mid x \in \mathbb{R}$ $(1, x_1) + (1, x_2) = (1, x_1 + x_2),\ \alpha(1, x) = (1, \alpha x)\}$ není vektorový prostor (zřejmě proto, že $1+1 \neq 1$ – jsou zajati zvyklostí sčítání po složkách).
- Nevyřeší snadné úlohy, nejsou-li rutinní: Určete dimenzi a) $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$, b) $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{R}$.
- Naučí se rutinní postupy, ale nevymyslí podle definice příklady struktur, neumí využít vlastností objektů. Následující jednoduché úlohy nevyřešil v písemce nikdo: Uveďte příklady zobrazení $f : U \to U$, které je unitární i samoadjungované. Uveďte příklady nediagonální matice, která je unitární i samoadjungovaná. Rozhodněte, zda operátor $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f(x, y) = (x + y, x)$ může být při vhodném skalárním součinu unitární. (Nenapadne je najít vlastní hodnoty a zjistit, že to nejsou komplexní jednotky.)

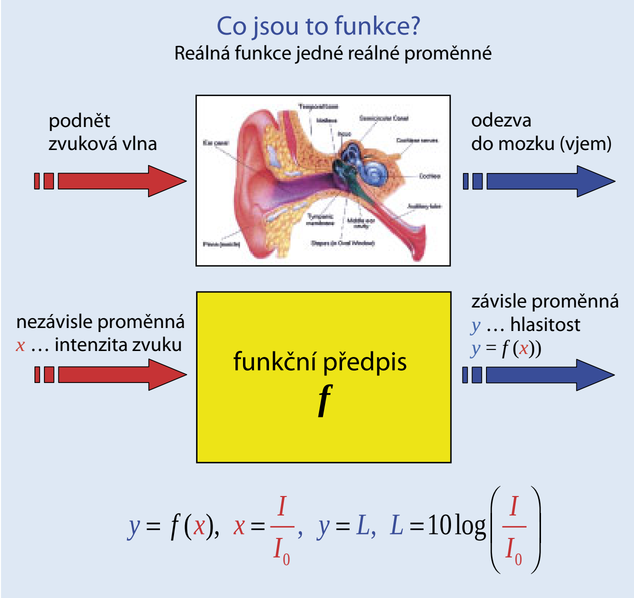
Matematická analýza v prvním a druhém semestru

- Studenti nedokážou vymyslet funkce zadaných vlastností: Uveďte příklad funkce, která má v bodě 0 nevlastní limitu a je shora ohraničená. Uveďte příklad periodické sudé funkce, která není ohraničená. Uveďte příklad funkce, která není integrovatelná na [0,1], ale její absolutní hodnota ano.
- Často bezmyšlenkovitě zkoušejí aplikovat definici tam, kde je to obtížné, místo aby si všimli souvislostí. Například jednomyslně tvrdí, že funkce $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ není ani sudá ani lichá, přestože před chvílí vypočítali, že je inverzní k $\sinh x$.

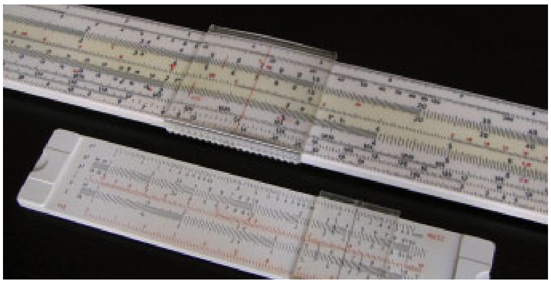
Kdo za to může?

Několik viníků je hned po ruce:

- Střední škola: Neučí studenty systematicky pracovat, heslo „škola hrou“ je pojato absurdním způsobem. Maturita z matematiky není povinná ani na gymnáziích.
- Přijímací řízení na vysokou školu: Místo přijímací zkoušky z matematiky a fyziky je na řadě škol jen test studijních předpokladů, jehož úroveň se rok od roku snižuje, vyřazují se testy, které prověřují analytické a kritické myšlení. Pro přijetí na přírodovědné obory je nízká hranice, často jsou přijati ještě uchazeči s percentilem15, zatímco na právnickou fakultu je nejnižší percentil přijatých stále přes 90.
- Vysoká škola, tj. „my sami“: Zábavné a tzv. „motivační“ předměty jsou zařazovány často na úkor předmětů oborových, studenti mají velkou volnost při volbě předmětů nesouvisejících s oborem studia, avšak započitatelných do kreditové hodnoty studia (princip „kumulace kreditů“). Učitelé rezignují na kontrolu práce studentů, zkoušení je mírné, „abychom nepřišli o peníze“. Ve vyšších semestrech se po studentech již nepožaduje to, co se v nižších naučili. Klesá úroveň požadavků i u státních zkoušek. Studijní a zkušební řády jsou mírné, výuka je v podstatě nepovinná.
- Kvalifikační a kariérní postupy akademických pracovníků se řídí kritérii, která sice formálně pedagogickou složku obsahují, ve skutečnosti však není respektována s patřičnou váhou. Kritériem úspěšnosti a potřebnosti akademického pracovníka jsou (často chybně interpretované) bibliometrické indexy a body za vědecké výsledky.



Obr. 4 Uši umí logaritmovat. Z výuky matematiky pro radiologické asistenty.



Bez logaritmů a exponenciál nelze dělat matematiku ani fyziku. Proč zmizely pomůcky, které tyto pojmy umožňovaly pochopit?

A tak nakonec zůstává obměna otázky položené už v [7]:

Jak přesvědčit současníky, že neznalosti v matematice, fyzice nebo chemii jsou stejnou vadou na intelektuální kráse člověka jako mezery jeho vzdělání v gramatice, literatuře či historii? Jak dostat do všeobecného povědomí staletími ověřenou zkušenost, že součástí kultury není jen literatura, hudba a výtvarné umění, ale i matematické, přírodní a technické vědy?

Literatura

[1] J. Kříž, M. Plesch, I. Čáp: „Fyzikální a přírodovědné olympiády s mezinárodní nadstavbou“, Čs. čas. fyz. **62**, 386–390 (2012).

[2] H. Siemsen: „Gnozeologická podstata finského úspěchu v projektu PISA“, Čs. čas. fyz. **62**, 304–311 (2012).

[3] V. Novák: *Vzpomínky a paměti (životopis).* Vlastním nákladem. Tiskl Pokorný a spol., Brno 1939.

[4] *Početnice pro měšťanské školy chlapecké i dívčí III.* Složili: J. Horčička a J. Nešpor. Schváleno výnosem C. K. Ministerstva osvěty a vyučování ze dne 11. září 1906 č. 22.580. Cena 1K6h. Nákladem J. Otty v Praze 1907.

[5] F. Vejsada, F. Talafous: *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia.* SPN, Praha 1969.

[6] E. Kriegelstein a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro SPŠ a SZTŠ.* Sedmé vydání, SPN, Praha 1965.

[7] I. Kraus: „Vzpomínka na zakladatelku československé rentgenografie Adélu Kochanovskou-Němejcovou“, Čs. čas. fyz. **62**, 256–258 (2012).